GUIA DO PROFESSOR

Caro professor, caso tenha algum questionamento de qualquer natureza, não hesite em nos contactar pelo e-mail:

conteudosdigitais@im.uff.br

DESCRIÇÃO

A teoria dos epiciclos (que estuda um certo tipo de composição de movimentos circulares) foi usada pelos gregos antigos para modelar o movimento aparente de planetas. Além disso, esta composição de movimentos circulares também permite desenhar várias curvas clássicas interessantes. Nesta atividade propomos um aplicativo interativo que explora trigonometria, curvas, números racionais e irracionais através da teoria dos epiciclos.

OBJETIVOS

Explorar a conexão entre funções trigonométricas e o círculo, com especial ênfase em amplitudes e frequências de movimentos circulares; praticar geometria analítica no plano; explorar números racionais e irracionais em um contexto geométrico (órbitas periódicas).

QUANDO USAR?

Sugerimos que a atividade seja usada depois da apresentação das funções trigonométricas (o que usualmente ocorre logo no final do primeiro ano do ensino médio).

COMO USAR?

Decidir como usar o computador é uma questão que depende de alguns fatores: número de alunos na turma, número de computadores disponíveis no laboratório de informática e tempo disponível em sala de aula. Em virtude disto, vamos sugerir três estratégias de uso desta atividade:

1. Como um exercício extraclasse.

   Nesta modalidade, você pode propor a atividade para seus alunos como um dever de casa (valendo um ponto extra), para ser realizado fora do tempo de sala de aula, isto é, em um horário livre no laboratório da escola ou na própria casa do aluno, caso ele possua um computador. Você pode definir um prazo pré-determinado para a realização da atividade (por exemplo, uma semana). Achamos que não é preciso que você explique o funcionamento do *software* da atividade, pois incluímos uma animação ilustrando todos os seus recursos. Naturalmente, no decorrer do prazo do dever de casa, você poderá tirar dúvidas eventuais de seus alunos.

Para tornar o trabalho mais orientado e focado, recomendamos fortemente que o dever de casa seja conduzido através de algumas questões que os alunos deverão estudar com o auxílio do *software* da atividade. O *formulário de acompanhamento do aluno*, apresentado mais embaixo, sugere vários exercícios. Este formulário também será útil como instrumento para uma discussão posterior em sala de aula (quando da devolução do formulário) e fornecerá subsídios para uma possível avaliação.

2. Em sala de aula com um projetor multimídia (*datashow*)

   Se você tiver acesso a um projetor multimídia (*datashow*) ou a um computador ligado na TV, você poderá usar o *software* desta atividade em sala de aula para, por exemplo, ao invés de desenhar os poliedros no quadro, exibi-los e manipulá-los através do computador. Se houver tempo, mesmo alguns exercícios do *formulário de acompanhamento do aluno* poderão ser resolvidos em sala de aula sob sua orientação.

3. Como uma atividade de laboratório sob a supervisão do professor.

   A grande vantagem desta modalidade é que você poderá acompanhar de perto como os seus alunos estão interagindo com o computador.

Principalmente nas modalidades 1 e 3, *recomendamos fortemente* que o aluno preencha algum tipo de questionário de acompanhamento, para avaliação posterior. Sugerimos o seguinte modelo (sinta-se livre para modificá-lo de acordo com suas necessidades):

epiciclos-aluno.rtf.

Este formulário de acompanhamento do aluno também estará acessível na página principal da atividade através do seguinte ícone:

.

As respostas dos questionamentos propostos neste formulário não estão incluídas com a atividade, mas elas podem ser solicitadas através do e-mail conteudosdigitais@im.uff.br.

OBSERVAÇÕES METODOLÓGICAS

Relatos de experiências (comprovados em nossos testes) mostram que os alunos têm forte resistência em preencher o formulário de acompanhamento. Mais ainda: estes relatos mostram que, frequentemente, os alunos conseguem argumentar corretamente de forma verbal, mas enfrentam dificuldades ao fazer o registro escrito de suas ideias.

Mesmo com as reclamações e resistência dos alunos, nossa sugestão é que você, professor, insista no preenchimento do formulário. Afinal, por vários motivos, é muito importante que o aluno adquira a habilidade de redigir corretamente um texto matemático que possa ser compreendido por outras pessoas.

OBSERVAÇÕES TÉCNICAS

A atividade pode ser acessada usando um navegador (Firefox 2+ ou Internet Explorer 7+), através do link http://www.uff.br/cdme/epiciclos/ (endereço alternativo: http://www.cdme.im-uff.mat.br/epiciclos/). Se você preferir, solicite que o responsável pelo laboratório da sua escola instale a atividade para acesso *offline*, isto é, sem a necessidade de conexão com a internet.

A atividade pode ser executada em qualquer sistema operacional: Windows, Linux e Mac OS. Porém, para executá-lo, é preciso que o computador tenha a linguagem JAVA instalada. A instalação da linguagem JAVA pode ser feita seguindo as orientações disponíveis no seguinte link http://www.java.com/pt_BR/.

Atenção: se você estiver usando a atividade *offline* através de uma cópia local em seu computador, é importante que os arquivos não estejam em um diretório cujo nome contenha acentos ou espaços.

Importante: algumas distribuições Linux vêm com o interpretador JAVA *GCJ Web Plugin* que não é compatível com o applet da atividade. Neste caso, recomendamos que você solicite ao responsável pelo laboratório da escola que instale o interpretador nativo da Sun, disponível no link http://www.java.com/pt_BR/.

Acessibilidade: a partir da Versão 2 do Firefox e da Versão 8 do Internet Explorer, é possível usar as combinações de teclas indicadas na tabela abaixo para ampliar ou reduzir uma página da internet, o que permite configurar estes navegadores para uma leitura mais agradável.

Combinação de Teclas	Efeito
Ctrl + +	Ampliar
Ctrl + -	Reduzir
Ctrl + 0	Voltar para a configuração inicial

Vantagens deste esquema: (1) além de áreas de texto, este sistema de teclas amplia também figuras e aplicativos FLASH e (2) o sistema funciona para qualquer página da internet, mesmo para aquelas sem uma programação nativa de acessibilidade.

DICAS

1. A atividade pode ser desenvolvida em parceria com o professor de física da sua escola. Além dos aspectos matemáticos, aspectos físicos (por exemplo, qual é o real motivo para o abandono da teoria dos epiciclos?) desdobramentos históricos e outros modelos para o sistema solar podem ser explorados juntos.

2. O Episódio *A Harmonia dos Mundos*, do seriado *Cosmos* do astrônomo Carl Sagan, apresenta com excelência os modelos ptolomaico, coperniciano e kepleriano para o sistema solar. Caso exista a oportunidade, recomendamos fortemente que este vídeo seja apresentado aos alunos antes da execução da atividade!

Foto: NASA (Wikimedia Commons).

3. O professor de física Dennis Duke da Universidade Estadual da Flórida, Estados Unidos da América, oferece uma coleção muito interessante de animações em FLASH exibindo os vários modelos para o sistema solar desenvolvidos ao longo da história. Vale a pena conferir!

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO APÓS A REALIZAÇÃO DA ATIVIDADE

Sugerimos fortemente que seja feita uma discussão com os alunos após a realização da tarefa. Se você optou por levá-los ao laboratório, isto pode ser feito no próprio laboratório, logo após o término da atividade. Se você optou por um exercício extraclasse, a discussão pode ser feita quando da devolução do questionário. Esta discussão pode incluir as diferentes estratégias de solução dos exercícios adotada por cada aluno, a comparação das respostas dos alunos, as dificuldades encontradas na realização dos exercícios, a ênfase em propriedades e resultados importantes, as informações suplementares, etc.

AVALIAÇÃO

Como instrumento de avaliação, sugerimos que você peça para os alunos elaborarem um relatório descrevendo as perguntas e respostas apresentadas na discussão em sala de aula. Nesse relatório, o professor poderá avaliar as capacidades de compreensão, argumentação e organização do aluno. Recomendamos que o questionário preenchido durante a realização da atividade seja anexado ao relatório.

REFERÊNCIAS

Boccaletti, D. *From The Epicycles of The Greeks to Kepler's Ellipse – The Breakdown of The Circle Paradigm*. Cosmology Through Time – Ancient and Modern Cosmology in the Mediterranean Area, Monte Porzio Catone (Rome), Italy, June 18-20, 2001. arXiv:physics/0107009v2 [physics.hist-ph]

Caravella, S. M. *Triangles in the Sky: Trigonometry and Early Theories of Planetary Motion*. MathDL (The MAA Mathematical Sciences Digital Library), 2010. Consultado em 23 de fevereiro de 2010.

Gearhart, C. A. *Epicycles, Eccentrics, and Ellipses: The Predictive Capabilites of Copernical Planetary Models*. Archive for History of Exact Sciences, vol. 32, n. 3-4, pp.207-222, 1985.

Ginnobili, S.; Carman, C. C. *Deferentes, Epiciclos y Adaptaciones*. Em: de Andrade, R.; Silva, C. C.; Ferreira, J. M. H.; Martins, L. A.-C. P. (editores) Filosofia e História da Ciência no Cone Sul. Seleção de Trabalhos do 5º Encontro. Associação de Filosofia e História da Ciência do Cone Sul, pp. 399-408, 2008.

Goldoni, G. *Copernicus Decoded*. The Mathematical Intelligencer, vol. 27, n. 3, pp. 13-30, 2005.

Kuhn, T. S. *The Copernican Revolution. Planetary Astronomy in The Development of Western Thought*. Harvard University Press, 1985.

Linton, C. M. *From Eudoxus to Einsten. A History of Mathematical Astronomy*. Cambridge University Press, 2004.

Neugebauer, O. *Apollonius' Planetary Theory*. Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. iii, pp. 641-648, 1955.

Pawley, M. G. *Closed Plane Curves Described by Finite and Infinite Sums of Rotating Vectors*. Journal of The Franklin Institute, vol. 307, n. 3, pp. 155-173, 1979.

[Clique aqui para voltar para a página principal!]

Dúvidas? Sugestões? Nós damos suporte! Contacte-nos pelo e-mail:
conteudosdigitais@im.uff.br.

Anexo

Formulário de Acompanhamento do Aluno

Atividade: epiciclos e interpolação trigonométrica

Aluno(a): ____ **Turma:** ______

Professor(a): ____

PARTE 1: O MODELO BÁSICO DA TEORIA DOS EPICICLOS

Nos exercícios que se seguem, lembre-se que as coordenadas do ponto amarelo em função do tempo t são dadas por

$$x = r_1 \cos(w_1\, t) + r_2 \cos(w_2\, t),$$
$$y = r_1\, \text{sen}(w_1\, t) + r_2\, \text{sen}(w_2\, t).$$

[01] Considere os valores $r_1 = 2$, $w_1 = 1$, $r_2 = 1$ e $w_2 = 8$. Quais são as coordenadas do ponto amarelo quando $t = \pi/2$? Para conferir sua resposta com o aplicativo da atividade, forneça os dados $r_1 = 2$, $w_1 = 1$, $r_2 = 1$ e $w_2 = 8$ nos campos respectivos (se você estiver usando o aplicativo pela primeira vez, estes já são os dados iniciais), digite **pi/2** no campo de nome "t" e, então, pressione o botão "Atualizar!".

[02] Para cada um dos experimentos indicados na tabela abaixo,

(a) faça uma simulação no aplicativo da atividade (para isto, digite os dados da tabela nos campos do aplicativo e, então, pressione o botão "Animar!)",
(b) elabore uma conjectura sobre a trajetória do ponto amarelo (A curva em azul é um círculo? É uma elipse? É uma parábola? Etc.) e
(c) tente provar sua conjectura usando as equações para as coordenadas do ponto amarelo em função do tempo t dadas acima.

Experimento	r_1	w_1	r_2	w_2	Trajetória
1	2	0	1	8	
2	2	1	1	0	
3	1	1	1	–1	
4	2	1	1	1	

[03] No Experimento 2 do Exercício [02], o ponto amarelo está girando em torno do centro do epiciclo ou ele está parado com relação a este centro? E no Experimento [04]?

[04] Se $r_1 = 1$, $w_1 = 1$, $r_2 = 1$ e $w_2 = 1$, a trajetória do ponto amarelo é um círculo. Para $t_{min} = 0$ e $t_{max} = 20.0$, o ponto amarelo dá mais de três voltas em torno do centro do deferente. Com $t_{min} = 0$, qual deve ser o valor de t_{max} para que o ponto amarelo dê exatamente uma volta em torno do centro do deferente?

[05] O valor do campo w_1 descreve a velocidade angular com a qual o ponto laranja (centro do epiciclo) se move sobre o deferente. O que acontece com o ponto laranja quando $w_1 = 0$? E quando $w_1 < 0$? E quando $w_1 > 0$? Dica: experimente fazer várias simulações com o aplicativo da atividade usando valores diferentes para w_1!

[06] O valor do campo w_2 descreve a velocidade angular com a qual o ponto amarelo se move sobre o epiciclo. O que acontece com o ponto amarelo quando $w_2 = 0$? E quando $w_2 < 0$? E quando $w_2 > 0$? Dica: experimente fazer várias simulações com o aplicativo da atividade usando valores diferentes para w_2!

[07] **(Rosáceas, Parte 1)** Quando $r_1 = r_2$, a trajetória (curva) que o ponto amarelo descreve recebe o nome de *rosácea*. Neste exercício nos concentraremos no caso em que w_1 e w_2 possuem sinais contrários. Use o aplicativo da atividade para desenhar as rosáceas indicadas na tabela abaixo. Tente identificar um padrão entre os parâmetros w_1 e w_2 e o número de pétalas da rosácea. Dica: para não ter que efetuar a animação em cada experimento, coloque o valor de t igual ao valor de t_{max}, mude os valores de w_1 e w_2 apenas e, então, pressione o botão "Atualizar!".

Experimento	r_1	w_1	r_2	w_2	$\|w_1/ w_2\|$	Número de Pétalas
1	2	2	2	–1	2	
2	2	3	2	–1	3	
3	2	4	2	–1	4	
4	2	5	2	–1	5	

5	2	6	2	–1	6	
6	2	6	2	–2	3	
7	2	6	2	–3	2	

[08] **(Rosáceas, Parte 2)** O que aconteceria se, na tabela do exercício anterior, você trocasse os valores das colunas w_1 e w_2 (de forma que as razões $|w_1/ w_2|$ ficariam iguais a 1/2, 1/3, 1/4, etc.)? O formato da trajetória mudaria? Justifique sua resposta!

[09] **(Rosáceas, Parte 3)** Nos exercícios [07] e [08] as razões $|w_1/ w_2|$ eram da forma n/1 ou 1/n. O objetivo deste exercício é estudar o formato de uma rosácea quando a razão $|w_1/ w_2|$ é um número racional da forma n/d. Use o aplicativo da atividade para desenhar as rosáceas indicadas na tabela abaixo. Tente identificar um padrão entre os parâmetros w_1 e w_2 e o número de pétalas da rosácea. Dica: para não ter que efetuar a animação em cada experimento, coloque o valor de t igual ao valor de t_{max}, mude os valores de w_1 e w_2 apenas e, então, pressione o botão "Atualizar!".

Experimento	r_1	w_1	r_2	w_2	$\|w_1/ w_2\|$	Número de Pétalas
1	2	2	2	–3	2/3	
2	2	2	2	–4	2/4 = 1/2	
3	2	2	2	–5	2/5	
4	2	2	2	–6	2/6 = 1/3	
5	2	2	2	–7	2/7	
6	2	2	2	–8	2/8 = 1/4	
7	2	2	2	–9	2/9	
8	2	3	2	–2	3/2	
9	2	3	2	–4	3/4	
10	2	3	2	–5	3/5	
11	2	3	2	–6	3/6 = 1/2	
12	2	3	2	–7	3/7	
13	2	3	2	–8	3/8	
14	2	3	2	–9	3/9 = 1/3	
15	2	8/9	2	–4/3	2/3	
16	2	sqrt(8)	2	–sqrt(18)	2/3	

Observação: sqrt(x) = x^(1/2).

[10] **(Rosáceas, Parte 4)** Se a razão w_1/ w_2 é um número racional, então a rosácea correspondente é uma curva fechada, isto é, a trajetória descrita pelo ponto amarelo será periódica (tente provar este fato!). Se w_1/ w_2 é um número irracional, a rosácea nunca se fechará! Para ver isto, forneça os seguintes valores para o aplicativo do programa:

$$r_1 = 2, \quad w_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad w_2 = \text{pi (o número } \pi), \quad t_{min} = 0, \quad t_{max} = 1000, \quad \Delta t = 0.1.$$

Em seguida, mude o valor do campo "t" para 100, 200, 300, até chegar em 1000, pressionando o botão "Atualizar!" a cada novo valor. Você perceberá que quando t aumenta, a trajetória tende a preencher o círculo de centro (0, 0) e raio 4.

[11] **(Cardioide)** Quando $r_1 = 2$, $w_1 = 1$, $r_2 = 1$ e $w_2 = 2$, o ponto amarelo descreve uma curva denominada *cardioide*. Use o aplicativo da atividade para desenhar a cardioide. Por que você acha que esta curva recebeu este nome?

[12] M. G. Pawley, em seu artigo *"Closed Plane Curves Described by Finite and Infinite Sums of Rotating Vectors"*, fornece valores para r_1, w_1, r_2 e w_2 para os quais a trajetória do ponto amarelo descreve uma curva que "aproxima" um polígono regular de N lados:

$$r_1 = 1 + \cos(\pi/N), \quad w_1 = 1, \quad r_2 = 1 - \cos(\pi/N), \quad w_2 = 1 - N.$$

Use o aplicativo da atividade para desenhar a trajetória que aproxima o heptágono regular (N = 7). Quais são os valores de r_1, w_1, r_2 e w_2 que você digitou nos campos do programa?

[13] Quando $r_1 = 2.4$, $w_1 = 2.0$, $r_2 = 1.6$ e $w_2 = –3.0$, o ponto amarelo descreve uma curva denominada *hipocicloide* de 5 pontas e 2 traços. Use o aplicativo da atividade para desenhar esta hipocicloide.

PARTE 2: O MOVIMENTO RETRÓGRADO DOS PLANETAS

[01] Sandra M. Caravella, em seu artigo *"Triangles in The Sky: Trigonometry and Early Theories of Planetary Motion"*, fornece os valores para r_1, w_1, r_2 e w_2 para os quais a trajetória do ponto amarelo descreve, de forma aproximada, o movimento de cada um dos planetas da tabela abaixo.

Planeta	r_1	w_1	r_2	w_2
Mercúrio	2.00	1.00	0.74	3.33
Vênus	2.00	1.00	1.44	0.63
Marte	2.00	0.53	1.32	0.48
Júpiter	2.00	0.08	0.38	0.91
Saturno	2.00	0.03	0.22	1.00

Use o aplicativo da Parte 2 da atividade para visualizar o movimento retrógrado destes planetas no modelo pitolomaico.