Atividade: epiciclos e interpolação trigonométrica

Aluno(a): ____ **Turma:** ______

Professor(a): ____

PARTE 1: O MODELO BÁSICO DA TEORIA DOS EPICICLOS

Nos exercícios que se seguem, lembre-se que as coordenadas do ponto amarelo em função do tempo t são dadas por

$$x = r_1 \cos(w_1\, t) + r_2 \cos(w_2\, t),$$
$$y = r_1 \operatorname{sen}(w_1\, t) + r_2 \operatorname{sen}(w_2\, t).$$

[01] Considere os valores $r_1 = 2$, $w_1 = 1$, $r_2 = 1$ e $w_2 = 8$. Quais são as coordenadas do ponto amarelo quando $t = \pi/2$? Para conferir sua resposta com o aplicativo da atividade, forneça os dados $r_1 = 2$, $w_1 = 1$, $r_2 = 1$ e $w_2 = 8$ nos campos respectivos (se você estiver usando o aplicativo pela primeira vez, estes já são os dados iniciais), digite **pi/2** no campo de nome "t" e, então, pressione o botão "Atualizar!".

[02] Para cada um dos experimentos indicados na tabela abaixo,

(a) faça uma simulação no aplicativo da atividade (para isto, digite os dados da tabela nos campos do aplicativo e, então, pressione o botão "Animar!)",
(b) elabore uma conjectura sobre a trajetória do ponto amarelo (A curva em azul é um círculo? É uma elipse? É uma parábola? Etc.) e
(c) tente provar sua conjectura usando as equações para as coordenadas do ponto amarelo em função do tempo t dadas acima.

Experimento	r_1	w_1	r_2	w_2	Trajetória
1	2	0	1	8	
2	2	1	1	0	
3	1	1	1	–1	
4	2	1	1	1	

[03] No Experimento 2 do Exercício [02], o ponto amarelo está girando em torno do centro do epiciclo ou ele está parado com relação a este centro? E no Experimento [04]?

[04] Se $r_1 = 1$, $w_1 = 1$, $r_2 = 1$ e $w_2 = 1$, a trajetória do ponto amarelo é um círculo. Para $t_{min} = 0$ e $t_{max} = 20.0$, o ponto amarelo dá mais de três voltas em torno do centro do deferente. Com $t_{min} = 0$, qual deve ser o valor de t_{max} para que o ponto amarelo dê exatamente uma volta em torno do centro do deferente?

[05] O valor do campo w_1 descreve a velocidade angular com a qual o ponto laranja (centro do epiciclo) se move sobre o deferente. O que acontece com o ponto laranja quando $w_1 = 0$? E quando $w_1 < 0$? E quando $w_1 > 0$? Dica: experimente fazer várias simulações com o aplicativo da atividade usando valores diferentes para w_1!

[06] O valor do campo w_2 descreve a velocidade angular com a qual o ponto amarelo se move sobre o epiciclo. O que acontece com o ponto amarelo quando $w_2 = 0$? E quando $w_2 < 0$? E quando $w_2 > 0$? Dica: experimente fazer várias simulações com o aplicativo da atividade usando valores diferentes para w_2!

[07] **(Rosáceas, Parte 1)** Quando $r_1 = r_2$, a trajetória (curva) que o ponto amarelo descreve recebe o nome de *rosácea*. Neste exercício nos concentraremos no caso em que w_1 e w_2 possuem sinais contrários. Use o aplicativo da atividade para desenhar as rosáceas indicadas na tabela abaixo. Tente identificar um padrão entre os parâmetros w_1 e w_2 e o número de pétalas da rosácea. Dica: para não ter que efetuar a animação em cada experimento, coloque o valor de t igual ao valor de t_{max}, mude os valores de w_1 e w_2 apenas e, então, pressione o botão "Atualizar!".

Experimento	r_1	w_1	r_2	w_2	$\|w_1/ w_2\|$	Número de Pétalas
1	2	2	2	–1	2	
2	2	3	2	–1	3	
3	2	4	2	–1	4	
4	2	5	2	–1	5	

5	2	6	2	–1	6	
6	2	6	2	–2	3	
7	2	6	2	–3	2	

[08] **(Rosáceas, Parte 2)** O que aconteceria se, na tabela do exercício anterior, você trocasse os valores das colunas w_1 e w_2 (de forma que as razões $|w_1/ w_2|$ ficariam iguais a 1/2, 1/3, 1/4, etc.)? O formato da trajetória mudaria? Justifique sua resposta!

[09] **(Rosáceas, Parte 3)** Nos exercícios [07] e [08] as razões $|w_1/ w_2|$ eram da forma n/1 ou 1/n. O objetivo deste exercício é estudar o formato de uma rosácea quando a razão $|w_1/ w_2|$ é um número racional da forma n/d. Use o aplicativo da atividade para desenhar as rosáceas indicadas na tabela abaixo. Tente identificar um padrão entre os parâmetros w_1 e w_2 e o número de pétalas da rosácea. Dica: para não ter que efetuar a animação em cada experimento, coloque o valor de t igual ao valor de t_{max}, mude os valores de w_1 e w_2 apenas e, então, pressione o botão "Atualizar!".

Experimento	r_1	w_1	r_2	w_2	$\|w_1/ w_2\|$	Número de Pétalas
1	2	2	2	–3	2/3	
2	2	2	2	–4	2/4 = 1/2	
3	2	2	2	–5	2/5	
4	2	2	2	–6	2/6 = 1/3	
5	2	2	2	–7	2/7	
6	2	2	2	–8	2/8 = 1/4	
7	2	2	2	–9	2/9	
8	2	3	2	–2	3/2	
9	2	3	2	–4	3/4	
10	2	3	2	–5	3/5	
11	2	3	2	–6	3/6 = 1/2	
12	2	3	2	–7	3/7	
13	2	3	2	–8	3/8	
14	2	3	2	–9	3/9 = 1/3	
15	2	8/9	2	–4/3	2/3	
16	2	sqrt(8)	2	–sqrt(18)	2/3	

Observação: sqrt(x) = x^(1/2).

[10] **(Rosáceas, Parte 4)** Se a razão w_1/ w_2 é um número racional, então a rosácea correspondente é uma curva fechada, isto é, a trajetória descrita pelo ponto amarelo será periódica (tente provar este fato!). Se w_1/ w_2 é um número irracional, a rosácea nunca se fechará! Para ver isto, forneça os seguintes valores para o aplicativo do programa:

$$r_1 = 2, \quad w_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad w_2 = \text{pi (o número } \pi), \quad t_{min} = 0, \quad t_{max} = 1000, \quad \Delta t = 0.1.$$

Em seguida, mude o valor do campo "t" para 100, 200, 300, até chegar em 1000, pressionando o botão "Atualizar!" a cada novo valor. Você perceberá que quando t aumenta, a trajetória tende a preencher o círculo de centro (0, 0) e raio 4.

[11] **(Cardioide)** Quando $r_1 = 2$, $w_1 = 1$, $r_2 = 1$ e $w_2 = 2$, o ponto amarelo descreve uma curva denominada *cardioide*. Use o aplicativo da atividade para desenhar a cardioide. Por que você acha que esta curva recebeu este nome?

[12] M. G. Pawley, em seu artigo *"Closed Plane Curves Described by Finite and Infinite Sums of Rotating Vectors"*, fornece valores para r_1, w_1, r_2 e w_2 para os quais a trajetória do ponto amarelo descreve uma curva que "aproxima" um polígono regular de N lados:

$$r_1 = 1 + \cos(\pi/N), \quad w_1 = 1, \quad r_2 = 1 - \cos(\pi/N), \quad w_2 = 1 - N.$$

Use o aplicativo da atividade para desenhar a trajetória que aproxima o heptágono regular (N = 7). Quais são os valores de r_1, w_1, r_2 e w_2 que você digitou nos campos do programa?

[13] Quando $r_1 = 2.4$, $w_1 = 2.0$, $r_2 = 1.6$ e $w_2 = –3.0$, o ponto amarelo descreve uma curva denominada *hipocicloide* de 5 pontas e 2 traços. Use o aplicativo da atividade para desenhar esta hipocicloide.

PARTE 2: O MOVIMENTO RETRÓGRADO DOS PLANETAS

[01] Sandra M. Caravella, em seu artigo *"Triangles in The Sky: Trigonometry and Early Theories of Planetary Motion"*, fornece os valores para r_1, w_1, r_2 e w_2 para os quais a trajetória do ponto amarelo descreve, de forma aproximada, o movimento de cada um dos planetas da tabela abaixo.

Planeta	r_1	w_1	r_2	w_2
Mercúrio	2.00	1.00	0.74	3.33
Vênus	2.00	1.00	1.44	0.63
Marte	2.00	0.53	1.32	0.48
Júpiter	2.00	0.08	0.38	0.91
Saturno	2.00	0.03	0.22	1.00

Use o aplicativo da Parte 2 da atividade para visualizar o movimento retrógrado destes planetas no modelo pitolomaico.