

# O Problema da Caixa com Tampa

Aluno(a): \_\_\_\_\_

Turma: \_\_\_\_\_

Professor(a): \_\_\_\_\_

## Enunciado do Problema

Um fabricante quer construir caixas com tampa a partir de uma folha de papelão retangular medindo 10 cm por 16 cm. Para construir a caixa, dois quadrados e dois retângulos são removidos dos cantos da folha de papelão. As abas que sobram são então dobradas para cima de modo a formar uma caixa com tampa. Quanto deve ser  $x$ , a medida em centímetros dos lados dos quadrados que são retirados da folha de papelão, para que o volume  $V$  da caixa seja o maior possível?

[01] (a) Para se familiarizar com o problema, na Parte 1 da atividade, digite alguns valores para  $x$ , observando o formato correspondente da caixa e o valor do seu volume  $V$ . Anote os valores que você digitou na tabela abaixo (acrescente mais linhas, caso sejam necessárias). **Atenção: neste momento, você não precisa se preocupar em determinar o valor de  $x$  que maximiza o volume  $V$ . Isto será feito mais adiante.**

$x$	$V$

(b) Você digitou algum valor para  $x$  que foi recusado pelo programa? Em caso afirmativo, escreva quais foram estes valores.

(c) Os valores de  $x = 20$ ,  $x = -2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 5$ ,  $x = 0.0001$  e  $x = 4.9999$  são recusados pelo programa? Por que sim? Por que não?

[02] O problema em questão pode ser modelado por uma função real  $f$  de domínio  $D$ .

- (a) Vá para a Parte 2 da atividade (clique no link no topo da Parte 1). Habilite a opção “Rastro” e arraste o ponto  $M$ . O programa irá marcar alguns pontos do gráfico da função  $f$ . Habilite então a opção “Gráfico” para ver o gráfico da função  $f$ . Copie à mão este gráfico aqui.
- (b) Determine o domínio  $D$  da função  $f$  e uma expressão para  $f(x)$ , isto é, determine o conjunto  $D$  de todos os valores de  $x$  para os quais o problema “tem sentido” e, para valores de  $x$  em  $D$ , uma expressão para  $f(x)$ . Confira sua resposta usando o programa: digite os dados nos campos correspondentes e, então, pressione o botão “Conferir!” para conferir sua resposta. Para fins de comparação, o programa sempre desenhará o gráfico da função que você especificou. **Importante:** você não deve resolver este item por “tentativa e erro”. Pegue lápis e papel e, usando seus conhecimentos de geometria, tente obter o domínio  $D$  e uma expressão para  $f(x)$ . Use então o programa para conferir sua resposta. Anote o seu raciocínio nesta folha.
- (c) Você acertou a função e o domínio de primeira? Em caso negativo, quantas tentativas você usou até o programa lhe dizer que você acertou a resposta? O que você estava errando?

[03] É possível demonstrar que existe um único número real  $p$  em  $D$  que maximiza o volume  $V$  da caixa. Usando a Parte 1 da atividade (através de “tentativa e erro”), determine uma aproximação do valor deste  $p$  ótimo com duas casas decimais corretas.

[04] Quantas caixas diferentes com volume igual a  $60 \text{ cm}^3$  podem ser construídas? Justifique sua resposta!

[05] É possível construir uma caixa com volume igual a  $80 \text{ cm}^3$ ? Por que sim? Por que não?

[06] Será que é possível determinar o ponto  $p$  ótimo cuja aproximação você calculou no Item [03]? A resposta é sim! É possível demonstrar que o único número real  $p$  em  $D$  que maximiza o volume  $V$  da caixa satisfaz a equação

$$6x^2 - 52x + 80 = 0.$$

Resolva esta equação e determine o valor de  $p$ . Compare com sua resposta para o Item [03]. **Importante:** não se preocupe, neste momento, em saber como a equação acima foi obtida. Caso você faça a disciplina “Cálculo Diferencial e Integral” na universidade, você aprenderá técnicas matemáticas que permitem deduzir esta equação.

[07] Qual é a imagem da função  $f$  que você estabeleceu no item [02] (b)? Em quais intervalos a função  $f$  é crescente? E decrescente?

[08] Existe algum valor de  $x$  em  $D$  que *minimiza* a função que você estabeleceu no item [02] (b)? Por que sim? Por que não?