

Um Problema Geométrico

Aluno(a): _____

Turma: _____

Professor(a): _____

Enunciado do Problema

Considere pontos A, B, C, H e M no plano. O ponto H pertence ao segmento de extremidades B e C, de modo que a distância entre B e H é igual a 2 m e a distância entre H e C é igual a 3 m. O segmento AH é perpendicular ao segmento BC e ele tem medida igual a 5 m. O ponto M pertence ao segmento de extremidades A e H. Quanto deve ser x , a medida em metros da distância entre os pontos A e M, para que o comprimento total L de fios ligando M aos pontos A, B e C seja o menor possível?

[01] (a) Para se familiarizar com o problema, na Parte 1 da atividade, digite alguns valores para x , observando o desenho da configuração geométrica dos fios correspondente e o valor do comprimento total L dos fios. Anote os valores que você digitou na tabela abaixo (acrescente mais linhas, caso sejam necessárias). **Atenção: neste momento, você não precisa se preocupar em determinar o valor de x que minimiza o comprimento total L . Isto será feito mais adiante.**

x	L

(b) Você digitou algum valor para x que foi recusado pelo programa? Em caso afirmativo, escreva quais foram estes valores.

(c) Os valores de $x = 20$, $x = -2$, $x = 0$, $x = 5$, $x = 0.0001$, $x = 4.9999$ e $x = 5.0001$ são recusados pelo programa? Por que sim? Por que não?

[02] O problema em questão pode ser modelado por uma função real f de domínio D .

- (a) Vá para a Parte 2 da atividade (clique no link no topo da Parte 1). Habilite a opção “Rastro” e arraste o ponto M. O programa irá marcar alguns pontos do gráfico da função f . Habilite então a opção “Gráfico” para ver o gráfico da função f . Copie à mão este gráfico aqui.
- (b) Determine o domínio D da função f e uma expressão para $f(x)$, isto é, determine o conjunto D de todos os valores de x para os quais o problema “tem sentido” e, para valores de x em D , uma expressão para $f(x)$. Confira sua resposta usando o programa: digite os dados nos campos correspondentes e, então, pressione o botão “Conferir!” para conferir sua resposta. Para fins de comparação, o programa sempre desenhará o gráfico da função que você especificou. **Importante:** você não deve resolver este item por “tentativa e erro”. Pegue lápis e papel e, usando seus conhecimentos de geometria, tente obter o domínio D e uma expressão para $f(x)$. Use então o programa para conferir sua resposta. Anote o seu raciocínio nesta folha.
- (c) Você acertou a função e o domínio de primeira? Em caso negativo, quantas tentativas você usou até o programa lhe dizer que você acertou a resposta? O que você estava errando?

[03] É possível demonstrar que existe um único número real p em D que minimiza o comprimento total L dos fios. Usando a Parte 1 da atividade (através de “tentativa e erro”), determine uma aproximação do valor deste p ótimo com duas casas decimais corretas.

[04] Quantas configurações geométricas diferentes com comprimento total L dos fios igual a 10 m podem ser construídas? Justifique sua resposta!

[05] É possível construir uma configuração geométrica com comprimento total L dos fios igual a 7 m? Por que sim? Por que

não?

[06] Será que é possível determinar o ponto p ótimo cuja aproximação você calculou no Item [03]? A resposta é sim! É possível demonstrar que o único número real p em D que minimiza o comprimento total L dos fios é igual a

$$p = 5 - \sqrt{-\frac{13}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{61 - 9u}} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{122 \sqrt{61 - 9u} + 9u \sqrt{61 - 9u} + 182}{\sqrt{61 - 9u}}},$$

onde u é igual a raiz cúbica de 300. Use uma calculadora para calcular uma aproximação de p e compare com sua resposta para o Item [03]. **Importante:** não se preocupe, neste momento, em saber como a expressão acima para o número p foi obtida. Caso você faça a disciplina “Cálculo Diferencial e Integral” na universidade, você aprenderá técnicas matemáticas que permitem obter este número.

[07] Qual é a imagem da função f que você estabeleceu no item [02] (b)? Em quais intervalos a função f é crescente? E decrescente?

[08] Existe algum valor de x em D que *maximiza* a função que você estabeleceu no item [02] (b)? Por que sim? Por que não?