

O Problema da Distância entre Ponto e Parábola

Aluno(a): _____

Turma: _____

Professor(a): _____

Enunciado do Problema

Dado um ponto A no plano cartesiano, quanto deve ser x para que a distância d entre A e $M = (x, x^2)$ (um ponto da parábola $y = x^2$) seja a menor possível?

MÓDULO 1: $A = (1, 3)$

Caso o ponto A não esteja na posição (1, 3) na Parte 1, clique e arraste-o para esta posição antes de prosseguir.

[01] (a) Para se familiarizar com o problema, na Parte 1 da atividade, digite alguns valores para x , observando a posição do ponto M correspondente e o valor da distância d entre A e M. Anote os valores que você digitou na tabela abaixo (acrescente mais linhas, caso sejam necessárias). **Atenção: neste momento, você não precisa se preocupar em determinar o valor de x que minimiza a distância d . Isto será feito mais adiante.**

x	d

(b) Você digitou algum valor para x que foi recusado pelo programa? Em caso afirmativo, escreva quais foram estes valores.

(c) Os valores de $x = -6$, $x = 0$, $x = 6$, $x = 20$ e $x = 100$ são recusados pelo programa? Por que sim? Por que não?

[02] O problema em questão pode ser modelado por uma função real f de domínio D .

- (a) Vá para a Parte 2 da atividade (clique no link no topo da Parte 1). Habilite a opção “Rastro” e arraste o ponto M. O programa irá marcar alguns pontos do gráfico da função f . Habilite então a opção “Gráfico” para ver o gráfico da função f . Copie à mão este gráfico aqui.
- (b) Determine o domínio D da função f e uma expressão para $f(x)$, isto é, determine o conjunto D de todos os valores de x para os quais o problema “tem sentido” e, para valores de x em D , uma expressão para $f(x)$. Confira sua resposta usando o programa: digite os dados nos campos correspondentes e, então, pressione o botão “Conferir!” para conferir sua resposta. Para fins de comparação, o programa sempre desenhará o gráfico da função que você especificou. **Importante:** você não deve resolver este item por “tentativa e erro”. Pegue lápis e papel e, usando seus conhecimentos de geometria, tente obter o domínio D e uma expressão para $f(x)$. Use então o programa para conferir sua resposta. Anote o seu raciocínio nesta folha.
- (c) Você acertou a função e o domínio de primeira? Em caso negativo, quantas tentativas você usou até o programa lhe dizer que você acertou a resposta? O que você estava errando?

[03] É possível demonstrar que existe um único número real p em D que minimiza a distância d . Usando a Parte 1 da atividade (através de “tentativa e erro”), determine uma aproximação do valor deste p ótimo com duas casas decimais corretas.

[04] Quantos pontos diferentes da parábola estão a uma distância igual a 4 u.c. do ponto A? Justifique sua resposta!

[05] Existe algum ponto da parábola que está a uma distância igual a 0.5 u.c. do ponto A? Por que sim? Por que não?

[06] Será que é possível determinar o ponto p ótimo cuja aproximação você calculou no Item [03]? A resposta é sim! É possível

demonstrar que o único número real p em D que minimiza a distância d é igual a

$$p = \frac{\sqrt{30}}{3} \cos \left(\frac{1}{3} \arctg \left(\frac{\sqrt{669}}{9} \right) \right).$$

Use uma calculadora para calcular uma aproximação de p e compare com sua resposta para o Item [03]. **Importante:** não se preocupe, neste momento, em saber como a expressão acima para o número p foi obtida. Caso você faça a disciplina “Cálculo Diferencial e Integral” na universidade, você aprenderá técnicas matemáticas que permitem obter este número.

[07] Qual é a imagem da função f que você estabeleceu no item [02] (b)? Dê um intervalo onde a função f é crescente e um intervalo onde a função d é decrescente.

[08] Existe algum valor de x em D que *maximiza* a função que você estabeleceu no item [02] (b)? Por que sim? Por que não?

MÓDULO 2: $A = (0, 3)$

Caso o ponto A não esteja na posição $(0, 3)$ na Parte 1, clique e arraste-o para esta posição antes de prosseguir.

[01] (a) Digite alguns valores para x , observando a posição do ponto M correspondente e o valor da distância d entre A e M . Anote os valores que você digitou na tabela abaixo (acrescente mais linhas, caso sejam necessárias).

x	d

(b) Você digitou algum valor para x que foi recusado pelo programa? Em caso afirmativo, escreva quais foram estes valores.

(c) Os valores de $x = -6$, $x = 0$, $x = 6$, $x = 20$ e $x = 100$ são recusados pelo programa? Por que sim? Por que não?

[02] O problema em questão pode ser modelado por uma função real f de domínio D .

- (a) Vá para a Parte 2 da atividade (clique no link no topo da Parte 1). Habilite a opção “Rastro” e arraste o ponto M . O programa irá marcar alguns pontos do gráfico da função f . Habilite então a opção “Gráfico” para ver o gráfico da função f . Copie este gráfico aqui.
- (b) Determine o domínio D da função f e uma expressão para $f(x)$, isto é, determine o conjunto D de todos os valores de x para os quais o problema “tem sentido” e, para valores de x em D , uma expressão para $f(x)$. Confira sua resposta usando o programa: digite os dados nos campos correspondentes e, então, pressione o botão “Conferir!” para conferir sua resposta. Para fins de comparação, o programa sempre desenhará o gráfico da função que você especificou. **Importante:** você não deve resolver este item por “tentativa e erro”. Pegue lápis e papel e, usando seus conhecimentos de geometria, tente obter o domínio D e uma expressão para $f(x)$. Use então o programa para conferir sua resposta.
- (c) Você acertou a função e o domínio de primeira? Em caso negativo, quantas tentativas você usou até o programa lhe dizer que você acertou a resposta? O que você estava errando?

[03] É possível demonstrar que existem exatamente dois números reais p em D que minimizam a distância d . Usando a Parte 1 da atividade (através de “tentativa e erro”), determine aproximações dos valores destes dois p ótimos com duas casas decimais corretas.

[04] Quantos pontos diferentes da parábola estão a uma distância igual a 4 u.c. do ponto A ? Justifique sua resposta!

[05] Existe algum ponto da parábola que está a uma distância igual a 1 u.c. do ponto A ? Por que sim? Por que não?

[06] Será que é possível determinar o ponto p ótimo cuja aproximação você calculou no Item [03]? A resposta é sim! É possível demonstrar que os dois números reais p em D que minimizam a distância d são diferentes de zero e satisfazem a equação

$$4x^3 - 10x = 0.$$

Resolva esta equação e determine os valores de p . Compare com sua resposta para o Item [03]. **Importante:** não se preocupe,

neste momento, em saber como a equação acima foi obtida. Caso você faça a disciplina “Cálculo Diferencial e Integral” na universidade, você aprenderá técnicas matemáticas que permitem deduzir esta equação.

[07] Qual é a imagem da função f que você estabeleceu no item [02] (b)? Em quais intervalos a função f é crescente? E decrescente?

[08] Existe algum valor de x em D que *maximiza* a função que você estabeleceu no item [02] (b)? Por que sim? Por que não?

MÓDULO 3

[01] Sabendo a solução ótima do problema quando $A = (1, 3)$, qual é a solução ótima quando $A = (-1, 3)$? É necessário fazer todas as contas novamente para responder esta questão?

[02] Existe alguma posição para o ponto A de forma que $f(x) < 0$ para algum x ?