

# O Problema da Distância entre Ponto e Reta

Aluno(a): \_\_\_\_\_

Turma: \_\_\_\_\_

Professor(a): \_\_\_\_\_

## Enunciado do Problema

Dado um ponto A no plano cartesiano, quanto deve ser  $x$  para que a distância  $d$  entre A e  $M = (x, -2x + 4)$  (um ponto da reta  $y = -2x + 4$ ) seja a menor possível?

## MÓDULO 1: $A = (1, 3)$

Caso o ponto A não esteja na posição  $(1, 3)$  na Parte 1, clique e arraste-o para esta posição antes de prosseguir.

[01] (a) Para se familiarizar com o problema, na Parte 1 da atividade, digite alguns valores para  $x$ , observando a posição do ponto M correspondente e o valor da distância  $d$  entre A e M. Anote os valores que você digitou na tabela abaixo (acrescente mais linhas, caso sejam necessárias). **Atenção: neste momento, você não precisa se preocupar em determinar o valor de  $x$  que minimiza a distância  $d$ . Isto será feito mais adiante.**

$x$	$d$

(b) Você digitou algum valor para  $x$  que foi recusado pelo programa? Em caso afirmativo, escreva quais foram estes valores.

(c) Os valores de  $x = -6$ ,  $x = 0$ ,  $x = 6$ ,  $x = 20$  e  $x = 100$  são recusados pelo programa? Por que sim? Por que não?

[02] O problema em questão pode ser modelado por uma função real  $f$  de domínio  $D$ .

- (a) Vá para a Parte 2 da atividade (clique no link no topo da Parte 1). Habilite a opção “Rastro” e arraste o ponto M. O programa irá marcar alguns pontos do gráfico da função  $f$ . Habilite então a opção “Gráfico” para ver o gráfico da função  $f$ . Copie à mão este gráfico aqui.
- (b) Determine o domínio  $D$  da função  $f$  e uma expressão para  $f(x)$ , isto é, determine o conjunto  $D$  de todos os valores de  $x$  para os quais o problema “tem sentido” e, para valores de  $x$  em  $D$ , uma expressão para  $f(x)$ . Confira sua resposta usando o programa: digite os dados nos campos correspondentes e, então, pressione o botão “Conferir!” para conferir sua resposta. Para fins de comparação, o programa sempre desenhará o gráfico da função que você especificou. **Importante:** você não deve resolver este item por “tentativa e erro”. Pegue lápis e papel e, usando seus conhecimentos de geometria, tente obter o domínio  $D$  e uma expressão para  $f(x)$ . Use então o programa para conferir sua resposta. Anote o seu raciocínio nesta folha.
- (c) Você acertou a função e o domínio de primeira? Em caso negativo, quantas tentativas você usou até o programa lhe dizer que você acertou a resposta? O que você estava errando?

[03] É possível demonstrar que existe um único número real  $p$  em  $D$  que minimiza a distância  $d$ . Usando a Parte 1 da atividade (através de “tentativa e erro”), determine uma aproximação do valor deste  $p$  ótimo com duas casas decimais corretas.

[04] Quantos pontos diferentes da reta estão a uma distância igual a 1 u.c. do ponto A? Justifique sua resposta!

[05] Existe algum ponto da reta que está a uma distância igual a 0.2 u.c. do ponto A? Por que sim? Por que não?

[06] Será que é possível determinar o ponto  $p$  ótimo cuja aproximação você calculou no Item [03]? A resposta é sim! É possível

demonstrar que o único número real  $p$  em  $D$  que minimiza a distância  $d$  satisfaz a equação

$$10x - 6 = 0.$$

Resolva esta equação e determine o valor de  $p$ . Compare com sua resposta para o Item [03]. **Importante:** não se preocupe, neste momento, em saber como a equação acima foi obtida. Quando você estudar geometria analítica, você aprenderá técnicas matemáticas que permitem deduzir esta equação.

[07] Qual é a imagem da função  $f$  que você estabeleceu no item [02] (b)? Dê um intervalo onde a função  $f$  é crescente e um intervalo onde a função  $d$  é decrescente.

[08] Existe algum valor de  $x$  em  $D$  que *maximiza* a função que você estabeleceu no item [02] (b)? Por que sim? Por que não?

## MÓDULO 2: $A = (0, 0)$

Caso o ponto  $A$  não esteja na posição  $(0, 0)$  na Parte 1, clique e arraste-o para esta posição antes de prosseguir.

[01] (a) Digite alguns valores para  $x$ , observando a posição do ponto  $M$  correspondente e o valor da distância  $d$  entre  $A$  e  $M$ . Anote os valores que você digitou na tabela abaixo (acrescente mais linhas, caso sejam necessárias).

$x$	$d$

(b) Você digitou algum valor para  $x$  que foi recusado pelo programa? Em caso afirmativo, escreva quais foram estes valores.

(c) Os valores de  $x = -6$ ,  $x = 0$ ,  $x = 6$ ,  $x = 20$  e  $x = 100$  são recusados pelo programa? Por que sim? Por que não?

[02] O problema em questão pode ser modelado por uma função real  $f$  de domínio  $D$ .

- (a) Vá para a Parte 2 da atividade (clique no link no topo da Parte 1). Habilite a opção “Rastro” e arraste o ponto  $M$ . O programa irá marcar alguns pontos do gráfico da função  $f$ . Habilite então a opção “Gráfico” para ver o gráfico da função  $f$ . Copie este gráfico aqui.
- (b) Determine o domínio  $D$  da função  $f$  e uma expressão para  $f(x)$ , isto é, determine o conjunto  $D$  de todos os valores de  $x$  para os quais o problema “tem sentido” e, para valores de  $x$  em  $D$ , uma expressão para  $f(x)$ . Confira sua resposta usando o programa: digite os dados nos campos correspondentes e, então, pressione o botão “Conferir!” para conferir sua resposta. Para fins de comparação, o programa sempre desenhará o gráfico da função que você especificou. **Importante:** você não deve resolver este item por “tentativa e erro”. Pegue lápis e papel e, usando seus conhecimentos de geometria, tente obter o domínio  $D$  e uma expressão para  $f(x)$ . Use então o programa para conferir sua resposta.
- (c) Você acertou a função e o domínio de primeira? Em caso negativo, quantas tentativas você usou até o programa lhe dizer que você acertou a resposta? O que você estava errando?

[03] É possível demonstrar que existe um único número real  $p$  em  $D$  que minimiza a distância  $d$ . Usando a Parte 1 da atividade (através de “tentativa e erro”), determine uma aproximação do valor deste  $p$  ótimo com duas casas decimais corretas.

[04] Quantos pontos diferentes da reta estão a uma distância igual a 4 u.c. do ponto  $A$ ? Justifique sua resposta!

[05] Existe algum ponto da reta que está a uma distância igual a 1 u.c. do ponto  $A$ ? Por que sim? Por que não?

[06] Será que é possível determinar o ponto  $p$  ótimo cuja aproximação você calculou no Item [03]? A resposta é sim! É possível demonstrar que o único número real  $p$  em  $D$  que minimiza a distância  $d$  satisfaz a equação

$$10x - 16 = 0.$$

Resolva esta equação e determine o valor de  $p$ . Compare com sua resposta para o Item [03]. **Importante:** não se preocupe, neste momento, em saber como a equação acima foi obtida. Quando você estudar geometria analítica, você aprenderá técnicas matemáticas que permitem deduzir esta equação.

[07] Qual é a imagem da função  $f$  que você estabeleceu no item [02] (b)? Em quais intervalos a função  $f$  é crescente? E decrescente?

[08] Existe algum valor de  $x$  em  $D$  que *maximiza* a função que você estabeleceu no item [02] (b)? Por que sim? Por que não?

### MÓDULO 3

[01] Explique por que o ponto  $M$  da reta  $y = -2x + 4$  mais próximo do ponto  $A = (1, 3)$  deve necessariamente satisfazer a seguinte propriedade: o segmento  $AP$  é perpendicular a reta  $y = -2x + 4$ .

[02] Existe alguma posição para o ponto  $A$  de forma que  $f(x) < 0$  para algum  $x$ ?