GUIA DO PROFESSOR

Caro professor, caso tenha algum questionamento de qualquer natureza, não hesite em nos contactar pelo e-mail:

conteudosdigitais@im.uff.br

DESCRIÇÃO

Nesta atividade apresentamos um software interativo que permite visualizar e estudar as projeções ortogonais nos três planos coordenados (*xy*, *xz* e *yz*) de uma variedade de objetos no espaço (pontos, curvas e poliedros). Ao se girar o objeto, suas projeções ortogonais são automaticamente atualizadas. Para o caso de poliedros, o software permite ainda exibir os segmentos que unem os vértices do poliedro com suas projeções ortogonais.

OBJETIVOS

Exercitar visualização espacial; estimular a compreensão das projeções ortogonais e de suas propriedades; oferecer um ambiente no qual o aluno pode explorar as relações entre objetos geométricos tridimensionais e suas projeções bidimensionais, fazer e testar conjecturas sobre eles, e resolver problemas envolvendo-os.

QUANDO USAR?

Sugerimos que a atividade seja usada quando da apresentação da teoria das projeções ortogonais em geometria espacial.

COMO USAR?

Decidir como usar o computador é uma questão que depende de alguns fatores: número de alunos na turma, número de computadores disponíveis no laboratório de informática e tempo disponível em sala de aula. Em virtude disto, vamos sugerir três estratégias de uso desta atividade:

1. Como um exercício extraclasse.

   Nesta modalidade, você pode propor a atividade para seus alunos como um dever de casa (valendo um ponto extra), para ser realizado fora do tempo de sala de aula, isto é, em um horário livre no laboratório da escola ou na própria casa do aluno, caso ele possua um computador. Você pode definir um prazo pré-determinado para a realização da atividade (por exemplo, uma semana). Achamos que não é preciso que você explique o funcionamento do *software* da atividade, pois incluímos uma animação ilustrando todos os seus recursos. Naturalmente, no decorrer do prazo do dever de casa, você poderá tirar dúvidas eventuais de seus alunos.

Para tornar o trabalho mais orientado e focado, recomendamos fortemente que o dever de casa seja conduzido através de algumas questões que os alunos deverão estudar com o auxílio do *software* da atividade. O *formulário de acompanhamento do aluno*, apresentado mais embaixo, sugere vários exercícios. Este formulário também será útil como instrumento para uma discussão posterior em sala de aula (quando da devolução do formulário) e fornecerá subsídios para uma possível avaliação.

2. Em sala de aula com um projetor multimídia (*datashow*)

   Se você tiver acesso a um projetor multimídia (*datashow*) ou a um computador ligado na TV, você poderá usar o *software* desta atividade em sala de aula para, por exemplo, ao invés de desenhar os poliedros no quadro, exibi-los e manipulá-los através do computador. Se houver tempo, mesmo alguns exercícios do *formulário de acompanhamento do aluno* poderão ser resolvidos em sala de aula sob sua orientação.

3. Como uma atividade de laboratório sob a supervisão do professor.

   A grande vantagem desta modalidade é que você poderá acompanhar de perto como os seus alunos estão interagindo com o computador. Sugerimos que você apresente o jogo aos alunos, resolvendo um dos desafios como exemplo e, a partir daí, deixe-os brincar livremente, intervindo apenas quando necessário.

Principalmente nas modalidades 1 e 3, *recomendamos fortemente* que o aluno preencha algum tipo de questionário de acompanhamento, para avaliação posterior. Sugerimos o seguinte modelo (sinta-se livre para modificá-lo de acordo com suas necessidades):

pro-aluno.rtf.

Este formulário de acompanhamento do aluno também estará acessível na página principal da atividade através do seguinte ícone:

.

As respostas dos questionamentos propostos neste formulário não estão incluídas com a atividade, mas elas podem ser solicitadas através do e-mail conteudosdigitais@im.uff.br.

OBSERVAÇÕES METODOLÓGICAS

Relatos de experiências (comprovados em nossos testes) mostram que os alunos têm forte resistência em preencher o formulário de acompanhamento. Mais ainda: estes relatos mostram que, frequentemente, os alunos conseguem argumentar corretamente de forma verbal, mas enfrentam dificuldades ao fazer o registro escrito de suas ideias.

Mesmo com as reclamações e resistência dos alunos, nossa sugestão é que você, professor, insista no preenchimento do formulário. Afinal, por vários motivos, é muito importante que o aluno adquira a habilidade de redigir corretamente um texto matemático que possa ser compreendido por outras pessoas.

OBSERVAÇÕES TÉCNICAS

A atividade pode ser acessada usando a internet, através do link http://www.uff.br/cdme/pro/ (endereço alternativo: http://www.cdme.im-uff.mat.br/pro/). Se você preferir, solicite que o responsável pelo laboratório da escola instale a atividade para acesso *offline*, isto é, sem a necessidade de conexão com a internet.

O jogo pode ser executado em qualquer sistema operacional: Windows, Linux e Mac OS. Porém, para executá-lo, é preciso que o computador tenha a linguagem JAVA instalada. A instalação da linguagem JAVA pode ser feita seguindo as orientações disponíveis no seguinte link http://www.java.com/pt_BR/.

Atenção: se você estiver usando a atividade *offline* através de uma cópia local em seu computador, é importante que os arquivos não estejam em um diretório cujo nome contenha acentos ou espaços.

Importante: algumas distribuições Linux vêm com o interpretador JAVA *GCJ Web Plugin* que não é compatível com o applet da atividade. Neste caso, recomendamos que você solicite ao responsável pelo laboratório da escola que instale o interpretador nativo da Sun, disponível no link http://www.java.com/pt_BR/.

Acessibilidade: a partir da Versão 2 do Firefox e da Versão 8 do Internet Explorer, é possível usar as combinações de teclas indicadas na tabela abaixo para ampliar ou reduzir uma página da internet, o que permite configurar estes navegadores para uma leitura mais agradável.

Combinação de Teclas	**Efeito**
Ctrl + +	Ampliar
Ctrl + -	Reduzir
Ctrl + 0	Voltar para a configuração inicial

Vantagens deste esquema: (1) além de áreas de texto, este sistema de teclas amplia também figuras e aplicativos FLASH e (2) o sistema funciona para qualquer página da internet, mesmo para aquelas sem uma programação nativa de acessibilidade.

DICAS

1. Lembre-se que, no software da atividade, você pode usar a tecla “**1**” para exibir/esconder os índices dos vértices. Isto pode ser útil, por exemplo, em uma discussão em sala: ao invés de ficar apontando para uma ou outra face, você pode exibir os índices dos vértices e, então, especificar uma determinada face enumerando os índices dos vértices que a compõem.

2. Para incluir um desenho gerado pelo *software* da atividade no Microsoft Word, você pode proceder como se segue: (a) pressione a tecla “**PRINT SCRN**” (isto irá capturar a tela do seu computador) (b) abra o programa *Paint* do Windows e, então, mantendo a tecla “**CTRL**” pressionada, pressione a tecla “**v**” (isto irá colar o desenho da tela no *Paint*), (c) recorte o desenho do poliedro no *Paint* (existe uma ferramenta que faz isto), (d) salve a figura e inclua-a no Microsoft Word.

3. Para imprimir o que está sendo exibido pelo *software* da atividade (incluindo o plano de corte ou modificações geradas pela aba “Modelar”), clique na área do desenho do *software* (para que ela ganhe o foco) e, então, mantendo a tecla “**CTRL**” pressionada, pressione a tecla “**p**”. Uma janela aparecerá solicitando permissão para a impressão. Ative a opção que diz “permitir sempre” (“*always allow*”), confirme e pronto!

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO APÓS A REALIZAÇÃO DA ATIVIDADE

Sugerimos fortemente que seja feita uma discussão com os alunos após a realização da tarefa. Se você optou por levá-los ao laboratório, isto pode ser feito no próprio laboratório, logo após o término da atividade. Se você optou por um exercício extraclasse, a discussão pode ser feita quando da devolução do questionário. Esta discussão pode incluir as diferentes estratégias de solução dos exercícios adotada por cada aluno, a comparação das respostas dos alunos, as dificuldades encontradas na realização dos exercícios, a ênfase em propriedades e resultados importantes, as informações suplementares, etc.

AVALIAÇÃO

Como instrumento de avaliação, sugerimos que você peça para os alunos elaborarem um relatório descrevendo as perguntas e respostas apresentadas na discussão em sala de aula. Nesse relatório, o professor poderá avaliar as capacidades de compreensão, argumentação e organização do aluno. Recomendamos que o questionário preenchido durante a realização da atividade seja anexado ao relatório.

REFERÊNCIAS

Andersen, K. *The Geometry of An Art – The History of The Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge*. Springer-Verlag, 2007.

Burger, T.; Gritzmann, P.; Klee, V. *Polytope Projection and Projection Polytopes*. The American Mathematical Monthly, vol. 103, n. 9, pp. 742-755, 1996.

Carlbom, I.; Paciorek, J. *Planar Geometric Projections and Viewing Transformations*. ACM Computing Surveys (CSUR), vol. 10, n. 4, pp. 465-502, 1978.

Hasan, M.; Lubiw, A. *Equiprojective Polyhedra*. CCCG 2003, Hailfax, Nova Scotia, August 11-13, 2003.

Lieu, D.; Sorby, S. *Visualization, Modeling, and Graphics for Engineering Design*. Delmar Cengage Learning, 2008.

McKenna, M.; Seidel, R. *Finding The Optimal Shadows of a Convex Polytope*. Annual Symposium on Computational Geometry, Proceedings of The First Annual Symposium on Computational Geometry, Baltimore, Maryland, United States, pp. 24-28, 1985.

[Clique aqui para voltar para a página principal!]

Dúvidas? Sugestões? Nós damos suporte! Contacte-nos pelo e-mail:
conteudosdigitais@im.uff.br.

Anexo

Formulário de Acompanhamento do Aluno

Atividade: projeções ortogonais

Aluno(a): ______________________________ **Turma:** ______

Professor(a): ______________________________

PARTE 1

[01] Verdadeiro ou falso? A projeção ortogonal de um segmento de reta nos planos *xy*, *xz* e *yz* é sempre um segmento de reta. Justifique sua resposta! Sugestão: estude os "Objetos de Estudo" do software da atividade!

[02] Verdadeiro ou falso? Se dois objetos possuem as mesmas projeções ortogonais nos planos *xy*, *xz* e *yz*, então estes objetos são iguais. Justifique sua resposta! Sugestão: estude os "Objetos de Estudo" do software da atividade!

[03] Verdadeiro ou falso? Se um segmento de reta tem comprimento l, então suas projeções ortogonais nos planos *xy*, *xz* e *yz*, também possuem comprimento l. Justifique sua resposta! Sugestão: estude os "Objetos de Estudo" do software da atividade!

[04] No software da atividade, selecione a categoria "Objetos de Estudo" e, então, selecione a opção "Segmento de Reta". Denote por L o comprimento deste segmento. Se os Controles 2 e 3 da aba "Rotação" possuem valor 0 (zero), então o valor do "Controle 1" determina o ângulo (medido em graus) do segmento de reta com o plano *xy* (verifique!).

(a) Nos controles da aba "Rotação", coloque "Controle 1" = 0, "Controle 2" = 0 e "Controle 3" = 0. Qual é o comprimento da projeção ortogonal do segmento de reta no plano *xy*?
(b) Nos controles da aba "Rotação", coloque "Controle 1" = 45, "Controle 2" = 0 e "Controle 3" = 0. Qual é o comprimento da projeção ortogonal do segmento de reta no plano *xy*? E da projeção no plano *yz*? E da projeção no plano *xz*?
(c) Nos controles da aba "Rotação", coloque "Controle 2" = 0 e "Controle 3" = 0. Qual é o comprimento da projeção ortogonal do segmento de reta no plano *xy* em função do valor do "Controle 1"?

PARTE 2

[01] No software da atividade, selecione a categoria "Curvas no Espaço" e, então, selecione a opção "Hélice Circular". Esta curva é obtida marcando-se, para cada t no intervalo $[0, 8\pi]$, os pontos no espaço com coordenadas

$$(x(t), y(t), z(t)) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t).$$

Qual é a projeção ortogonal da hélice no plano *xy*? E no plano *xz*? E no plano *yz*? Justifique sua resposta! Dica: a partir das coordenadas que definem a curva, tente "eliminar" a variável t, obtendo equações só em termos de x, y ou z. Importante: ao fazer sua análise, certifique-se que os valores dos controles da aba "Rotação" são todos iguais a zero.

[02] No software da atividade, selecione a categoria "Curvas no Espaço" e, então, selecione a opção "Curva Interessante 1". Esta curva é obtida marcando-se, para cada t no intervalo $[-1.2, 1.2]$, os pontos no espaço com coordenadas

$$(x(t), y(t), z(t)) = (t, t^2, -t^2).$$

Qual é a projeção ortogonal da Curva Interessante 1 no plano *xy*? E no plano *xz*? E no plano *yz*? Justifique sua resposta! Dica: a partir das coordenadas que definem a curva, tente "eliminar" a variável t, obtendo equações só em termos de x, y ou z. Importante: ao fazer sua análise, certifique-se que os valores dos controles da aba "Rotação" são todos iguais a zero.

[03] No software da atividade, selecione a categoria "Curvas no Espaço" e, então, selecione a opção "Curva Interessante 2". Esta curva é obtida marcando-se, para cada t no intervalo $[-1.2, 1.2]$, os pontos no espaço com coordenadas

$$(x(t), y(t), z(t)) = (t, t^2, t^3).$$

Qual é a projeção ortogonal da Curva Interessante 2 no plano *xy*? E no plano *xz*? E no plano *yz*? Justifique sua resposta! Dica: a partir das coordenadas que definem a curva, tente "eliminar" a variável t, obtendo equações só em termos de x, y ou z. Importante: ao fazer sua análise, certifique-se que os valores dos controles da aba "Rotação" são todos iguais a zero.

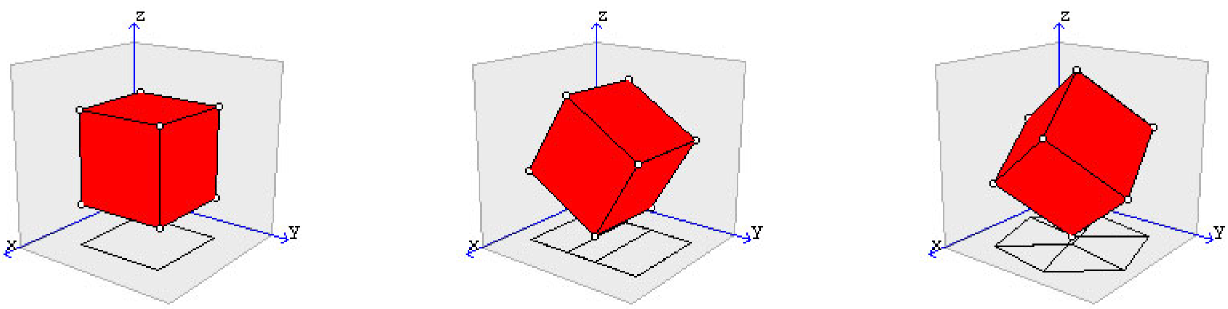
[04] No software da atividade, selecione a categoria “Curvas no Espaço” e, então, selecione a opção “Curva de Viviani”. Esta curva é obtida marcando-se, para cada t no intervalo $[0, 2\pi]$, os pontos no espaço com coordenadas

$$(x(t), y(t), z(t)) = (\cos^2(t), \cos(t)\ \mathrm{sen}(t), \mathrm{sen}(t)).$$

Qual é a projeção ortogonal da Curva de Viviani no plano *xy*? E no plano *xz*? Justifique sua resposta! Dica: a partir das coordenadas que definem a curva, tente “eliminar” a variável *t*, obtendo equações só em termos de *x*, *y* ou *z*. Importante: ao fazer sua análise, certifique-se que os valores dos controles da aba “Rotação” são todos iguais a zero.

PARTE 3

[01] **(Poliedros Equiprojetivos)** A projeção ortogonal de um *poliedro convexo* no plano *xy* é um polígono convexo. Se você girar o poliedro, sua sombra (projeção ortogonal) neste plano também mudará (faça algumas experiências com o *software* da atividade). Dizemos que o poliedro está em uma *posição regular* com relação ao plano *xy* se, depois de girá-lo, nenhuma de suas faces é paralela ao eixo *z*. Por exemplo, o cubo *não está* em posição regular com relação ao plano *xy* nas Figuras (a) e (b) a seguir. Na Figura (c) ele está em posição regular.



(a) (b) (c)

Dizemos então que um *poliedro convexo* é *equiprojetivo* se existe um número natural *k* tal que, para toda posição regular do poliedro convexo com relação ao plano *xy*, sua sombra neste plano é um polígono de *k* lados.

(a) Dê valores para os controles “Controle 1”, “Controle 2” e “Controle 3” (disponíveis na aba “Rotação” do software da atividade) que colocam cada poliedro especificado em posição ***não regular***. Observação: para fornecer um valor com mais casas decimais, digite o número no campo de entrada do controle (use um ponto “.” ao invés de uma vírgula “,” para números decimais) e, então, pressione a tecla “ENTER”.

Posição Não Regular				
Categoria	**Poliedro**	**Valor do Controle 1**	**Valor do Controle 2**	**Valor do Controle 3**
Sólidos Platônicos	Cubo			
Sólidos Platônicos	Tetraedro			
Sólidos Platônicos	Octaedro			
Sólidos Platônicos	Dodecaedro			
Prismas	Regular de Base Pentagonal			
Prismas	Regular de Base Triangular			

(b) Dê valores para os controles “Controle 1”, “Controle 2” e “Controle 3” (disponíveis na aba “Rotação” do software da atividade) que colocam cada poliedro especificado em posição ***regular***.

Posição Regular				
Categoria	**Poliedro**	**Valor do Controle 1**	**Valor do Controle 2**	**Valor do Controle 3**
Sólidos Platônicos	Cubo			
Sólidos Platônicos	Tetraedro			
Sólidos Platônicos	Octaedro			
Sólidos Platônicos	Dodecaedro			
Prismas	Regular de Base Pentagonal			
Prismas	Regular de Base Triangular			

(c) O tetraedro é um poliedro equiprojetivo? E o octaedro? E o dodecaedro? E o icosaedro? Justifique sua resposta! Em caso negativo, forneça valores para os controles da aba “Rotação” que coloque o poliedro em posições regulares com sombras no plano *xy* com número de lados diferentes.

(d) Os poliedros listados a seguir são equiprojetivos. Colocando-os em (qualquer) posição regular, determine o número de lados (que é constante!) de sua sombra no plano *xy*.

Poliedros Equiprojetivos		
Categoria	**Poliedro**	**Número de Lados da Sombra no Plano *xy***
Sólidos Platônicos	Cubo	
Prismas	Oblíquo de Base Triangular	
Prismas	Oblíquo de Base Quadrangular	
Prismas	Oblíquo de Base Pentagonal	
Prismas	Oblíquo de Base Hexagonal	
Sólidos de Catalan	Dodecaedro Rômbico	
Sólidos de Catalan	Triacontaedro Rômbico	

PARTE 4

[01] No software da atividade, selecione a categoria "Objetos de Estudo" e, então, selecione a opção "Quadrado". Clique na aba "Rotação" e use os três controles deslizantes para girá-lo. Como você posicionaria este quadrado para que sua projeção ortogonal no plano *xy* tenha área máxima? E área mínima?

[02] No software da atividade, selecione a categoria "Sólidos Platônicos" e, então, selecione a opção "Cubo". Clique na aba "Rotação" e use os três controles deslizantes para girá-lo. Como você posicionaria este cubo para que sua projeção ortogonal no plano *xy* tenha área máxima? E área mínima?