



GUIA DO PROFESSOR

Caro professor, caso tenha algum questionamento de qualquer natureza, não hesite em nos contactar pelo e-mail:

conteudosdigitais@im.uff.br

DESCRIÇÃO

Esta atividade oferece seis aplicativos orientados para a simulação de experimentos aleatórios no computador, com ênfase em probabilidade geométrica. O primeiro aplicativo simula uma roda da fortuna onde o espaço amostral e as probabilidades podem ser modificadas, permitindo a simulação de experimentos clássicos como o lançamento de uma moeda e o lançamento de um dado. O segundo aplicativo explica um algoritmo muito usado na geração de números pseudoaleatórios no computador: o gerador congruente linear. Os demais aplicativos são simulações com as quais é possível testar o gerador congruente linear. As três últimas simulações são experimentos em probabilidade geométrica: a área do círculo, o volume da esfera e o clássico problema da agulha de Buffon.

OBJETIVOS

Oferecer um ambiente interativo no qual o aluno é levado a ponderar o conceito de aleatoriedade; explorar as tecnologias usadas pelos computadores para simular aleatoriedade; explorar a relação entre geometria e probabilidade.

QUANDO USAR?

Sugerimos que a atividade seja usada depois da apresentação dos conceitos probabilísticos (espaço amostral, casos possíveis e casos favoráveis, eventos aleatórios e suas probabilidades, eventos simples equiprováveis).

COMO USAR?

Decidir como usar o computador é uma questão que depende de alguns fatores: número de alunos na turma, número de computadores disponíveis no laboratório de informática e tempo disponível em sala de aula. Em virtude disto, vamos sugerir três estratégias de uso desta atividade:

1. Como um exercício extraclasse.

Nesta modalidade, você pode propor a atividade para seus alunos como um dever de casa (valendo um ponto extra), para ser realizado fora do tempo de sala de aula, isto é, em um horário livre no laboratório da escola ou na própria casa do aluno, caso ele possua um computador. Você pode definir um prazo pré-determinado para a realização da atividade (por

exemplo, uma semana). Achamos que não é preciso que você explique o funcionamento do *software* da atividade, pois incluímos uma animação ilustrando todos os seus recursos. Naturalmente, no decorrer do prazo do dever de casa, você poderá tirar dúvidas eventuais de seus alunos.

Para tornar o trabalho mais orientado e focado, recomendamos fortemente que o dever de casa seja conduzido através de algumas questões que os alunos deverão estudar com o auxílio do *software* da atividade. O *formulário de acompanhamento do aluno*, apresentado mais embaixo, sugere vários exercícios. Este formulário também será útil como instrumento para uma discussão posterior em sala de aula (quando da devolução do formulário) e fornecerá subsídios para uma possível avaliação.

2. Em sala de aula com um projetor multimídia (*datashow*)

Se você tiver acesso a um projetor multimídia (*datashow*) ou a um computador ligado na TV, você poderá usar o *software* desta atividade em sala de aula para, por exemplo, ao invés de desenhar os poliedros no quadro, exibi-los e manipulá-los através do computador. Se houver tempo, mesmo alguns exercícios do *formulário de acompanhamento do aluno* poderão ser resolvidos em sala de aula sob sua orientação.

3. Como uma atividade de laboratório sob a supervisão do professor.

A grande vantagem desta modalidade é que você poderá acompanhar de perto como os seus alunos estão interagindo com o computador. Sugerimos que você apresente o jogo aos alunos, resolvendo um dos desafios como exemplo e, a partir daí, deixe-os brincar livremente, intervindo apenas quando necessário.

Principalmente nas modalidades 1 e 3, *recomendamos fortemente* que o aluno preencha algum tipo de questionário de acompanhamento, para avaliação posterior. Sugerimos o seguinte modelo (sinta-se livre para modificá-lo de acordo com suas necessidades):

[rdf-aluno.rtf](#).

Este formulário de acompanhamento do aluno também estará acessível na página principal da atividade através do seguinte ícone:



As respostas dos questionamentos propostos neste formulário não estão incluídas com a atividade, mas elas podem ser solicitadas através do e-mail conteudosdigitais@im.uff.br.

OBSERVAÇÕES METODOLÓGICAS

Relatos de experiências (comprovados em nossos testes) mostram que os alunos têm forte resistência em preencher o formulário de acompanhamento. Mais ainda: estes relatos mostram que, frequentemente, os alunos conseguem argumentar corretamente de forma verbal, mas enfrentam dificuldades ao fazer o registro escrito de suas ideias.

Mesmo com as reclamações e resistência dos alunos, nossa sugestão é que você, professor, insista no preenchimento do formulário. Afinal, por vários motivos, é muito importante que o aluno adquira a habilidade de redigir corretamente um texto matemático que possa ser compreendido por outras pessoas.

OBSERVAÇÕES TÉCNICAS




A atividade pode ser acessada usando a internet, através do link <http://www.uff.br/cdme/rdf/> (endereço alternativo: <http://www.cdme.im-uff.mat.br/rdf/>). Se você preferir, solicite que o responsável pelo laboratório da escola instale a atividade para acesso *offline*, isto é, sem a necessidade de conexão com a internet.

O jogo pode ser executado em qualquer sistema operacional: Windows, Linux e Mac OS. Porém, para executá-lo, é preciso que o computador tenha a linguagem JAVA instalada. A instalação da linguagem JAVA pode ser feita seguindo as orientações disponíveis no seguinte link http://www.java.com/pt_BR/.

Atenção: se você estiver usando a atividade *offline* através de uma cópia local em seu computador, é importante que os arquivos não estejam em um diretório cujo nome contenha acentos ou espaços.

Importante: algumas distribuições Linux vêm com o interpretador JAVA *GCJ Web Plugin* que não é compatível com o applet da atividade. Neste caso, recomendamos que você solicite ao responsável pelo laboratório da escola que instale o interpretador nativo da Sun, disponível no link http://www.java.com/pt_BR/.

Acessibilidade: a partir da Versão 2 do Firefox e da Versão 8 do Internet Explorer, é possível usar as combinações de teclas indicadas na tabela abaixo para ampliar ou reduzir uma página da internet, o que permite configurar estes navegadores para uma leitura mais agradável.

| Combinação de Teclas | Efeito |
|---|------------------------------------|
|  | Ampliar |
|  | Reduzir |
|  | Voltar para a configuração inicial |

Vantagens deste esquema: (1) além de áreas de texto, este sistema de teclas amplia também figuras e aplicativos FLASH e (2) o sistema funciona para qualquer página da internet, mesmo para aquelas sem uma programação nativa de acessibilidade.

DICAS

Em sala de aula, você pode usar o aplicativo da [Parte 1](#) para simular o lançamento de uma moeda e, ao mesmo tempo, pedir que os alunos façam o experimento com uma moeda real. Neste cenário, você pode levantar as seguintes questões para um debate entre os alunos: (1) Qual método é “mais justo”? (2) Os dois experimentos são realmente aleatórios? (3) Se ao realizar 10 experimentos saíssem 10 caras sucessivas, isto significaria que a moeda está viciada ou que o computador está “roubando”?

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO APÓS A REALIZAÇÃO DA ATIVIDADE

Sugerimos fortemente que seja feita uma discussão com os alunos após a realização da tarefa. Se você optou por levá-los ao laboratório, isto pode ser feito no próprio laboratório, logo após o término da atividade. Se você optou por um exercício extraclasse, a discussão pode ser feita quando da devolução do questionário. Esta discussão pode incluir as diferentes estratégias de solução dos exercícios adotada por cada aluno, a comparação das respostas dos alunos, as dificuldades encontradas na realização dos exercícios, a ênfase em propriedades e resultados importantes, as informações suplementares, etc.

AValiação

Como instrumento de avaliação, sugerimos que você peça para os alunos elaborarem um relatório descrevendo as perguntas e respostas apresentadas na discussão em sala de aula. Nesse relatório, o professor poderá avaliar as capacidades de compreensão, argumentação e organização do aluno. Recomendamos que o questionário preenchido durante a realização da atividade seja anexado ao relatório.

REFERÊNCIAS

Calude, C. S. *Who Is Afraid of Randomness?*. CDMTCS Research Report Series, University of Auckland, New Zealand, 2000.

Diaconis, P.; Holmes, S.; Montgomery, R. *Dynamical Bias in The Coin Toss*. SIAM Review, vol. 49. n. 2, pp. 211-235, 2007.

Gentle, J. E. *Random Number Generation and Monte Carlo Methods*. Second Edition. Statistics and Computing, Springer-Verlag, 2003.

Howard, V.; Reed, M. G. *Unbiased Stereology: Three-dimensional Measurement in Microscopy Advanced Methods*. Taylor & Francis Routledge, 2005.

Knuth, D. E. *The Art of Computer Programming*. Volume 2. Seminumerical Algorithms. Addison Wesley Longman, 1998.

Peterson, I. *The Jungles of Randomness – A Mathematical Safari*. Wiley, 1998.

Ross, S. M. *Simulation*. Fourth Edition. Academic Press, 2006.

Stroeven, P.; Hu, J. *Review Paper – Stereology: Historical Perspective and Applicability to Concrete Technology*. Materials and Structures, v. 39, pp. 127-135, 2006.

Volchan, S. B. *What is A Random Sequence?*. The American Mathematical Monthly, vol. 109, pp. 46-63, January, 2002.

Volchan, S. B. *A Teoria Algorítmica da Aleatoriedade*. Em Chediak, K.; Videira, A. A. P. (Editores). *Temas de Filosofia da Natureza*, UERJ, pp. 123-130, 2004.

Wagner, E. *Probabilidade Geométrica – O Problema do Macarrão e Um Paradoxo Famoso*. Revista do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, vol. 34, pp. 28-35, 1997.

[\[Clique aqui para voltar para a página principal!\]](#)

Dúvidas? Sugestões? Nós damos suporte! Contacte-nos pelo e-mail:
conteudosdigitais@im.uff.br.

Anexo

Formulário de Acompanhamento do Aluno

Atividade: rodas da fortuna

Aluno(a): _____ Turma: _____

Professor(a): _____

PARTE 1

[01] Como você configuraria o aplicativo da Parte 1 para que ele simulasse o seguinte experimento aleatório: jogar uma moeda honesta e observar a face voltada para cima? Qual seria o número de possibilidades? Quais seriam os valores das probabilidades? Que nomes você usaria?

[02] Como você configuraria o aplicativo da Parte 1 para que ele simulasse o seguinte experimento aleatório: jogar um dado equilibrado e observar o número na face voltada para cima? Qual seria o número de possibilidades? Quais seriam os valores das probabilidades? Que nomes você usaria?

[03] Como você configuraria o aplicativo da Parte 1 para que ele simulasse o seguinte experimento aleatório: jogar dois dados equilibrados e observar a soma dos números nas faces voltadas para cima? Qual seria o número de possibilidades? Quais seriam os valores das probabilidades? Que nomes você usaria?

[04] Como você configuraria o aplicativo da Parte 1 para que ele simulasse o seguinte experimento aleatório: jogar dois dados equilibrados e observar o maior número entre os números nas faces voltadas para cima? Qual seria o número de possibilidades? Quais seriam os valores das probabilidades? Que nomes você usaria?

[05] Em sua opinião, qual dispositivo seria mais justo: usar o aplicativo da Parte 1 para simular um jogo de cara/coroa ou usar uma moeda de verdade?

PARTE 2

[01] Calcule os 10 primeiros números gerados pelo gerador congruente linear

$$x_{n+1} = (a x_n + c) \bmod m$$

para $x_0 = 15$, $a = 3$, $c = 0$ e $m = 150$. Mais precisamente, calcule:

x_1 que é o resto da divisão inteira de $(a x_0 + c)$ por m ,

x_2 que é o resto da divisão inteira de $(a x_1 + c)$ por m , onde x_1 é o número calculado anteriormente,

x_3 que é o resto da divisão inteira de $(a x_2 + c)$ por m , onde x_2 é o número calculado anteriormente, etc.

Confira sua resposta usando o aplicativo da Parte 2 da atividade.

[02] Calcule os 10 primeiros números gerados pelo gerador congruente linear

$$x_{n+1} = (a x_n + c) \bmod m$$

para $x_0 = 3$, $a = 5$, $c = 7$ e $m = 200$. Mais precisamente, calcule:

x_1 que é o resto da divisão inteira de $(a x_0 + c)$ por m ,

x_2 que é o resto da divisão inteira de $(a x_1 + c)$ por m , onde x_1 é o número calculado anteriormente,

x_3 que é o resto da divisão inteira de $(a x_2 + c)$ por m , onde x_2 é o número calculado anteriormente, etc.

Confira sua resposta usando o aplicativo da Parte 2 da atividade.

[03] Qual é a sequência de números produzida pelo gerador congruente linear $x_{n+1} = (a x_n + c) \bmod m$ quando $m > 0$, $c = 0$ e $x_0 = 0$?

[04] Qual é a sequência de números produzida pelo gerador congruente linear $x_{n+1} = (a x_n + c) \bmod m$ quando $m > 0$, $c = 0$, $a = 1$ e x_0 é um número inteiro entre 0 e m ?

PARTE 4

[01] Usando o aplicativo da Parte 4, sorteie pelo menos 300 pontos com o gerador congruente linear ($m = 2147483647$, $a = 16807$, $c = 0$ e $s = 1567177967$). Qual é o valor do campo “Razão $\times 4$ ”? O número dado neste campo é uma aproximação de π com quantas decimais corretas?

[02] Usando o aplicativo da Parte 4, sorteie pelo menos 300 pontos com o gerador congruente linear ($m = 509$, $a = 128$, $c = 0$ e $s = 1$). Qual é o valor do campo “Razão $\times 4$ ”? O número dado neste campo é uma aproximação de π com quantas decimais corretas?

[03] Usando o aplicativo da Parte 4, sorteie pelo menos 300 pontos com o gerador Mersenne Twister. Qual é o valor do campo “Razão $\times 4$ ”? O número dado neste campo é uma aproximação de π com quantas decimais corretas?

[05] Considere o seguinte problema de probabilidade geométrica: selecionado ao acaso um ponto de um quadrado Q , qual é a probabilidade de que ele pertença ao círculo C inscrito em Q . A resposta depende da medida do lado de Q ?

PARTE 5

[01] Usando o aplicativo da Parte 5, sorteie pelo menos 300 pontos com o gerador congruente linear ($m = 2147483647$, $a = 16807$, $c = 0$ e $s = 1567177967$). Qual é o valor do campo “Razão $\times 6$ ”? O número dado neste campo é uma aproximação de π com quantas decimais corretas?

[02] Usando o aplicativo da Parte 5, sorteie pelo menos 300 pontos com o gerador congruente linear ($m = 509$, $a = 128$, $c = 0$ e $s = 1$). Qual é o valor do campo “Razão $\times 6$ ”? O número dado neste campo é uma aproximação de π com quantas decimais corretas?

[03] Usando o aplicativo da Parte 5, sorteie pelo menos 300 pontos com o gerador Mersenne Twister. Qual é o valor do campo “Razão $\times 6$ ”? O número dado neste campo é uma aproximação de π com quantas decimais corretas?

[05] Considere o seguinte problema de probabilidade geométrica: selecionado ao acaso um ponto de um cubo C qual é a probabilidade de que ele pertença à esfera E inscrita em C . A resposta depende da medida da aresta de C ?

[06] O gerador RANDU é um gerador congruente linear definido pelos seguintes parâmetros: $m = 2147483648$, $a = 65539$, $c = 0$ e $s = 1$. Este gerador foi muito usado nos computadores *mainframe* da IBM na década de 1960. Ele é considerado um dos *piores* geradores de números pseudoaleatórios inventados até hoje. Isto acontece porque existe uma correlação muito marcante entre os números sorteados por este gerador: triplas de números gerados pertencem a um determinado número de planos. Você pode verificar isto com o aplicativo da Parte 5: insira os dados $m = 2147483648$, $a = 65539$, $c = 0$ e $s = 1$ nos campos correspondentes e pressione o botão “Sortear!”. Sorteie pelo menos 3000 pontos para observar o efeito. Lembre-se que você pode clicar e arrastar o cubo para observá-lo de posições diferentes. Você também pode pressionar as teclas 3 e 4 para controlar o efeito de perspectiva da cena. Quantos planos você percebe dentro do cubo?

PARTE 6

[01] Usando o aplicativo da Parte 6, sorteie pelo menos 300 pontos com o gerador congruente linear ($m = 2147483647$, $a = 16807$, $c = 0$ e $s = 1567177967$). Qual é o valor do campo “ $(1/\text{Razão}) \times 2$ ”? O número dado neste campo é uma aproximação de π com quantas decimais corretas?

[02] Usando o aplicativo da Parte 6 sorteie pelo menos 300 pontos com o gerador congruente linear ($m = 509$, $a = 128$, $c = 0$ e $s = 1$). Qual é o valor do campo “ $(1/\text{Razão}) \times 2$ ”? O número dado neste campo é uma aproximação de π com quantas decimais corretas?

[03] Usando o aplicativo da Parte 6, sorteie pelo menos 300 pontos com o gerador Mersenne Twister. Qual é o valor do campo “ $(1/\text{Razão}) \times 2$ ”? O número dado neste campo é uma aproximação de π com quantas decimais corretas?