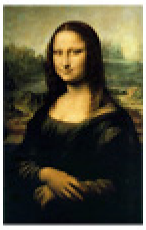
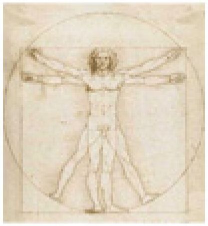
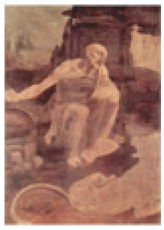
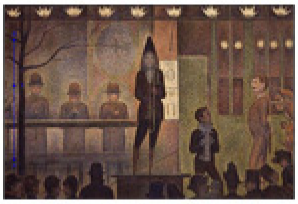
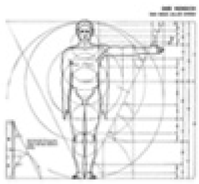
Atividade: o número de ouro

Aluno(a): ____ **Turma:** ______

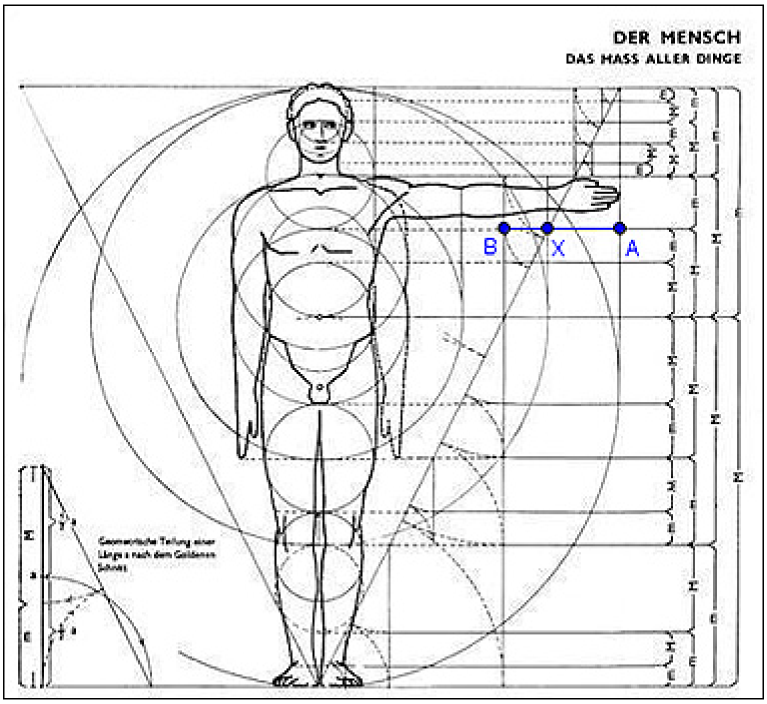
Professor(a): ____

PARTE 1

[01] Marque nas figuras abaixo os elementos áureos que você encontrou em cada figura!

[02] Na ilustração *Der Mensch das Mass aller Dinge*, Neufert indica explicitamente a presença da razão áurea para segmentos verticais através dos símbolos “m” e “M” girados de 90°. Ele não faz isto para segmentos horizontais. É possível concluir que, na figura abaixo, o ponto X realmente divide o segmento AB na razão áurea? Justifique sua resposta!



PARTE 2

[01] Quais são os valores de *a* e *b* que você escolheu para aproximar o formato da concha do náutilo por uma espiral logarítmica?

[02] Explique, com suas palavras, quais são os efeitos geométricos que o fator de escala *a* e o fator de crescimento *b* têm sobre o formato da espiral logarítmica. O que acontece se $b = 0$? E se $a = 0$?

[03] (Opcional) Alguns autores permitem que o fator de crescimento *b* de uma espiral logarítmica assuma valores negativos também. Qual é a diferença entre as espirais logarítmicas

$$r = a\, e^{+|b|\,\theta} \quad \text{e} \quad r = a\, e^{-|b|\,\theta}?$$

PARTE 3

[01] Indique na tabela abaixo os valores de k = CD/AB que você encontrou para os elementos anatômicos considerados por Vitruvius.

CD	AB	k = CD/AB
Altura.	Comprimento dos braços estendidos.	
Altura.	Distância entre a raiz do cabelo e a linha do queixo.	
Altura.	Largura máxima dos ombros.	
Altura.	Distância do topo da cabeça para a linha inferior do queixo.	
Altura.	Distância do topo da cabeça para a linha dos mamilos.	
Altura.	Distância do cotovelo para a axila.	
Altura.	Distância do cotovelo para a ponta da mão.	
Altura da cabeça.	Distância da linha do queixo para o nariz.	
Altura.	Comprimento da mão.	
Altura da face.	Distância da raiz do cabelo para a linha das sobrancelhas.	
Altura.	Distância do topo da cabeça até a linha inferior do pescoço.	

[02] Vitruvius indica que o comprimento do pé de um homem deve ser igual a um sexto de sua altura. Leonardo da Vinci desenhou o pé do *O Homem Vitruviano* seguindo esta orientação?

PARTE 4

[01] Uma fotografia de um segmento dividido em duas partes iguais pode exibir um segmento dividido na razão áurea?

[02] Mona Lisa é retratada com o rosto ligeiramente virado para a sua esquerda no quadro pintado por Leonardo da Vinci. O que aconteceria com as proporções do seu rosto em um quadro onde ela estivesse com o rosto posicionado de frente para o pintor?

PARTE 5

[01] Mostre que o número de ouro ϕ é uma raiz da função quadrática $f(x) = x^2 - x - 1$. Mostre que a outra raiz é $-1/\phi$.

[02] Usando que o número de ouro satisfaz a equação $\phi^2 = \phi + 1$, calcule $\phi^4 + \phi^3 - \phi$ (você pode calcular este número sem uma calculadora!).

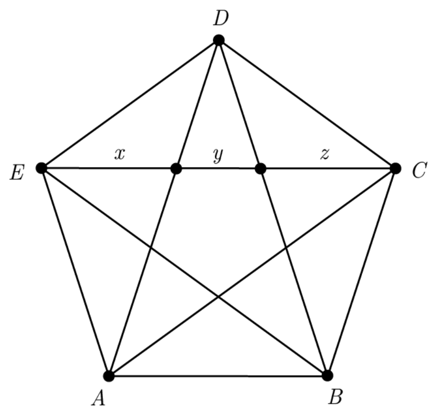
[03] Sem usar uma calculadora, calcule o valor exato dos seguintes números (ϕ, como sempre, representa o número de ouro):

$$p = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}}} \qquad \text{e} \qquad q = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\phi}}}.$$

[04] Mostre que

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}} \qquad \text{e} \qquad \phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}.$$

[05] Na figura abaixo, *ABCDE* é um pentágono regular e a diagonal *CE* está dividida em três segmentos de comprimentos x, y e z. Demonstre que $x/y = \phi$, $(x + y)/z = \phi$ e $(x + y + z)/(x + y) = \phi$. Mais ainda, demonstre que se $y = 1$, então $x = \phi$, $(x + y) = \phi^2$ e $(x + y + z) = \phi^3$.



[06] Por que a construção com régua e compasso descrita no item (7) da Parte 5 (Algumas Propriedades Matemáticas do Número de Ouro) de fato produz o ponto X que divide o segmento AB na razão áurea?

[07] Enquanto que a razão de ouro ϕ é a raiz positiva da função quadrática $f(x) = x^2 - x - 1$, a *razão de prata* (em inglês, *silver ratio*) δ_S é a raiz positiva da função quadrática $g(x) = x^2 - 2x - 1$. Calcule o número de prata!

PARTE 6

[01] Considere a equação quadrática $F_n x^2 = F_{n-1} x + F_{n-2}$. Explique por que $x = 1$ é uma solução desta equação e por que $x = (F_{n-1}/F_n) - 1$ é a outra.

[02] (Opcional) Usando a fórmula de Binet, mostre que quando n tende para infinito, o quociente F_{n+1}/F_n tende para ϕ.

[03] (Opcional) O objetivo deste exercício é deduzir a fórmula de Binet usando matrizes. O volume 2 da coleção “A Matemática do Ensino Médio” de E. L. Lima et alii apresenta uma outra demonstração para a fórmula de Binnet através de um teorema de caracteriza soluções de recorrências lineares de segunda ordem.

(a) Mostre que para todo $n \geq 3$,

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Mostre que para todo $n \geq 3$,

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = A^{n-2} \cdot \begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix}.$$

(c) Mostre que

$$A = \begin{bmatrix} \phi & -\phi^{-1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & -\phi^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\phi}{\phi+2} & \dfrac{1}{\phi+2} \\ -\dfrac{\phi}{\phi+2} & \dfrac{\phi+1}{\phi+2} \end{bmatrix} = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

(d) Mostre que para todo $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} A^{n-2} &= \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{n-2} = \underbrace{(P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot \cdots \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1})}_{n-2} = P \cdot D^{n-2} \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot \begin{bmatrix} \phi^{n-2} & 0 \\ 0 & (-\phi)^{-(n-2)} \end{bmatrix} \cdot P^{-1}. \end{aligned}$$

(e) Mostre que para todo $n \geq 3$,

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & -\phi^{-1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi^{n-2} & 0 \\ 0 & (-\phi)^{-(n-2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\phi}{\phi+2} & \dfrac{1}{\phi+2} \\ -\dfrac{\phi}{\phi+2} & \dfrac{\phi+1}{\phi+2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix}.$$

(f) Lembrando que $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$, use a equação matricial acima para deduzir a fórmula de Binet. Dica: use que $\phi^n + \phi^{n-1} = \phi^{n-1}(\phi + 1) = \phi^{n-1}\phi^2 = \phi^{n+1}$ e que $1 + 2/\phi$ é igual a raiz quadrada de 5.

PARTE 7

[01] Procure no YouTube (http://www.youtube.com.br) por vídeos relacionados com o número de ouro. Inclua na sua pesquisa vídeos em espanhol (número de oro), vídeos em inglês (golden number) e vídeos em francês (nombre d'or). Faça então uma análise crítica das imagens. Os elementos áureos estão posicionados de forma a realmente indicar uma região de interesse? Ao enquadrar um retângulo áureo, por exemplo, parte da região de interesse ficou de fora? Você pode começar sua análise a partir do desenho animado Donald no País da Matemática (http://www.youtube.com/watch?v=SUSyRUkFKHY).