



GUIA DO PROFESSOR

Caro professor, caso tenha algum questionamento de qualquer natureza, não hesite em nos contactar pelo e-mail:

conteudosdigitais@im.uff.br

DESCRIÇÃO

Dizemos que um ponto X divide um segmento AB na razão áurea (também conhecida como razão de ouro, divina proporção, proporção em extrema razão ou divisão de extrema razão) se X pertence ao segmento AB e $AX/XB = (1 + 5^{1/2})/2$. Este número tem muitas aplicações surpreendentes em vários ramos da matemática. Contudo, muito do que se diz sobre a presença deste número na natureza, artes, arquitetura e anatomia é falso! Através de uma coleção de aplicativos interativos, esta atividade tem dois propósitos principais: (1) apresentar algumas propriedades matemáticas do número de ouro e (2) evidenciar as falsas aplicações deste número (muito comuns em textos de divulgação em educação matemática).

OBJETIVOS

Apresentar algumas propriedades matemáticas do número de ouro; evidenciar as falsas aplicações deste número.

QUANDO USAR?

A atividade pode ser usada, por exemplo, quando da apresentação das propriedades métricas do pentágono regular em geometria plana ou quando da apresentação da sequência de Fibonacci.

COMO USAR?

Decidir como usar o computador é uma questão que depende de alguns fatores: número de alunos na turma, número de computadores disponíveis no laboratório de informática e tempo disponível em sala de aula. Em virtude disto, vamos sugerir três estratégias de uso desta atividade:

1. Como um exercício extraclasse.

Nesta modalidade, você pode propor a atividade para seus alunos como um dever de casa (valendo um ponto extra), para ser realizado fora do tempo de sala de aula, isto é, em um horário livre no laboratório da escola ou na própria casa do aluno, caso ele possua um computador. Você pode definir um prazo pré-determinado para a realização da atividade (por exemplo, uma semana). Acharmos que não é preciso que você explique o funcionamento do *software* da atividade, pois incluímos uma animação ilustrando todos os seus recursos. Naturalmente, no decorrer do prazo do dever de casa, você poderá tirar dúvidas eventuais de

seus alunos.

Para tornar o trabalho mais orientado e focado, recomendamos fortemente que o dever de casa seja conduzido através de algumas questões que os alunos deverão estudar com o auxílio do *software* da atividade. O *formulário de acompanhamento do aluno*, apresentado mais embaixo, sugere vários exercícios. Este formulário também será útil como instrumento para uma discussão posterior em sala de aula (quando da devolução do formulário) e fornecerá subsídios para uma possível avaliação.

2. Em sala de aula com um projetor multimídia (*datashow*)

Se você tiver acesso a um projetor multimídia (*datashow*) ou a um computador ligado na TV, você poderá usar o *software* desta atividade em sala de aula para, por exemplo, ao invés de desenhar os poliedros no quadro, exibi-los e manipulá-los através do computador. Se houver tempo, mesmo alguns exercícios do *formulário de acompanhamento do aluno* poderão ser resolvidos em sala de aula sob sua orientação.

3. Como uma atividade de laboratório sob a supervisão do professor.

A grande vantagem desta modalidade é que você poderá acompanhar de perto como os seus alunos estão interagindo com o computador. Sugerimos que você apresente o jogo aos alunos, resolvendo um dos desafios como exemplo e, a partir daí, deixe-os brincar livremente, intervindo apenas quando necessário.

Principalmente nas modalidades 1 e 3, *recomendamos fortemente* que o aluno preencha algum tipo de questionário de acompanhamento, para avaliação posterior. Sugerimos o seguinte modelo (sinta-se livre para modificá-lo de acordo com suas necessidades):

[rza-aluno.rtf](#).

Este formulário de acompanhamento do aluno também estará acessível na página principal da atividade através do seguinte ícone:



As respostas dos questionamentos propostos neste formulário não estão incluídas com a atividade, mas elas podem ser solicitadas através do e-mail conteudosdigitais@im.uff.br.

OBSERVAÇÕES TÉCNICAS




A atividade pode ser acessada usando a internet, através do link <http://www.uff.br/cdme/rza/> (endereço alternativo: <http://www.cdme.im-uff.mat.br/rza/>). Se você preferir, solicite que o responsável pelo laboratório da escola instale a atividade para acesso *offline*, isto é, sem a necessidade de conexão com a internet.

O jogo pode ser executado em qualquer sistema operacional: Windows, Linux e Mac OS. Porém, para executá-lo, é preciso que o computador tenha a linguagem JAVA instalada. A instalação da linguagem JAVA pode ser feita seguindo as orientações disponíveis no seguinte link http://www.java.com/pt_BR/.

Atenção: se você estiver usando a atividade *offline* através de uma cópia local em seu computador, é importante que os arquivos não estejam em um diretório cujo nome contenha acentos ou espaços.

Importante: algumas distribuições Linux vêm com o interpretador JAVA *GCJ Web Plugin* que não é compatível com o applet da atividade. Neste caso, recomendamos que você solicite ao responsável pelo laboratório da escola que instale o interpretador nativo da Sun, disponível no link http://www.java.com/pt_BR/.

Acessibilidade: a partir da Versão 2 do Firefox e da Versão 8 do Internet Explorer, é possível usar as combinações de teclas indicadas na tabela abaixo para ampliar ou reduzir uma página da internet, o que permite configurar estes navegadores para uma leitura mais agradável.

Combinação de Teclas	Efeito
	Ampliar
	Reduzir
	Voltar para a configuração inicial

Vantagens deste esquema: (1) além de áreas de texto, este sistema de teclas amplia também figuras e aplicativos FLASH e (2) o sistema funciona para qualquer página da internet, mesmo para aquelas sem uma programação nativa de acessibilidade.

OBSERVAÇÕES METODOLÓGICAS

Relatos de experiências (comprovados em nossos testes) mostram que os alunos têm forte resistência em preencher o formulário de acompanhamento. Mais ainda: estes relatos mostram que, frequentemente, os alunos conseguem argumentar corretamente de forma verbal, mas enfrentam dificuldades ao fazer o registro escrito de suas ideias.

Mesmo com as reclamações e resistência dos alunos, nossa sugestão é que você, professor, insista no preenchimento do formulário. Afinal, por vários motivos, é muito importante que o aluno adquira a habilidade de redigir corretamente um texto matemático que possa ser compreendido por outras pessoas.


OBSERVAÇÕES TÉCNICAS

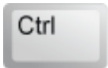

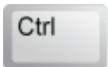

A atividade pode ser acessada usando a internet, através do link <http://www.uff.br/cdme/rza/> (endereço alternativo: <http://www.cdme.im-uff.mat.br/rza/>). Se você preferir, solicite que o responsável pelo laboratório da escola instale a atividade para acesso *offline*, isto é, sem a necessidade de conexão com a internet.

O jogo pode ser executado em qualquer sistema operacional: Windows, Linux e Mac OS. Porém, para executá-lo, é preciso que o computador tenha a linguagem JAVA instalada. A instalação da linguagem JAVA pode ser feita seguindo as orientações disponíveis no seguinte link http://www.java.com/pt_BR/.

Importante: algumas distribuições Linux vêm com o interpretador JAVA *Gcj Web Plugin* que não é compatível com o applet da atividade. Neste caso, recomendamos que você solicite ao responsável pelo laboratório da escola que instale o interpretador nativo da Sun, disponível no link http://www.java.com/pt_BR/.

Acessibilidade: a partir da Versão 2 do Firefox e da Versão 8 do Internet Explorer, é possível usar as combinações de teclas indicadas na tabela abaixo para ampliar ou reduzir uma página da internet, o que permite configurar estes navegadores para uma leitura mais agradável.

Combinação de Teclas	Efeito
	Ampliar

 + 	Reduzir
 + 	Voltar para a configuração inicial

Vantagens deste esquema: (1) além de áreas de texto, este sistema de teclas amplia também figuras e aplicativos FLASH e (2) o sistema funciona para qualquer página da internet, mesmo para aquelas sem uma programação nativa de acessibilidade.

DICAS

Após a realização da atividade, você pode pedir para que seus alunos façam uma pesquisa no [YouTube](https://www.youtube.com) por vídeos relacionados com o número de ouro: em português, em espanhol (número de oro), em inglês (golden number) e em francês (nombre d'or). Peça então para eles fazerem uma análise crítica das imagens.

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO APÓS A REALIZAÇÃO DA ATIVIDADE

Sugerimos fortemente que seja feita uma discussão com os alunos após a realização da tarefa. Se você optou por levá-los ao laboratório, isto pode ser feito no próprio laboratório, logo após o término da atividade. Se você optou por um exercício extraclasse, a discussão pode ser feita quando da devolução do questionário. Esta discussão pode incluir as diferentes estratégias de solução dos exercícios adotada por cada aluno, a comparação das respostas dos alunos, as dificuldades encontradas na realização dos exercícios, a ênfase em propriedades e resultados importantes, as informações suplementares, etc.

AValiação

Como instrumento de avaliação, sugerimos que você peça para os alunos elaborarem um relatório descrevendo as perguntas e respostas apresentadas na discussão em sala de aula. Nesse relatório, o professor poderá avaliar as capacidades de compreensão, argumentação e organização do aluno. Recomendamos que o questionário preenchido durante a realização da atividade seja anexado ao relatório.

REFERÊNCIAS

- Frings, M. *The Golden Section in Architectural Theory*. Nexus Network Journal, vol. 4, no. 1, pp. 9-32, 2002.
- Gardner, M. *Notes on a Fringe-Watcher: The Cult of the Golden Ratio*. Skeptical Inquirer, n. 18, pp. 243-247, 1994.
- Herz-Fischler, R. *A Mathematical History of The Golden Number*. Dover Publications, Inc., 1987.
- Huntley, H. E. *The Divine Proportion: A Study in Mathematical Beauty*. Dover Publications, Inc., 1970.
- Huylebrouck, D.; Labarque P. *More True Applications of The Golden Number*. Nexus Network Journal, vol. 4, n. 1, pp. 45-58, 2002.
- Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. Volume 2.

Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção do Professor de Matemática, 2003.

Livio, M. *The Golden Ratio: The Story of Phi, The World's Most Astonishing Number*. Broadway Books, 2002.

Markowsky, G. *Misconceptions About The Golden Ratio*. College Mathematics Journal, vol. 23, n. 1, pp. 2-19, 1992.

Morgan, M. H. *Vitruvius: The Ten Books on Architecture*. Harvard University Press, 1914.

Olariu, A. *Golden Section and The Art of Painting*. Cornell University Library, arXiv.org e-Print archive, [arXiv:physics/9908036v1](https://arxiv.org/abs/physics/9908036v1) [physics.soc-ph], 1999.

Peterson, I. [Sea Shell Spirals](#). MathTrek, Science News, 2009.

Posamentier, A. S.; Lehmann, I. *The (Fabulous) Fibonacci Numbers*. Prometheus Books, 2007.

Shart, J. *Spirals and The Golden Section*. Nexus Network Journal, vol. 4, n. 1, pp. 59-82, 2002.

Tannenbaum, P. *Excursions in Modern Mathematics with Mini-excursions*. Pearson Prentice Hall, 2007.

Veenstra, T. B.; Miller, C. M. *The Matrix Connection: Fibonacci and Inductive Proof*. Mathematics Teacher, vol. 99, n. 5, 2006.

Walser, H. *The Golden Section*. The Mathematical Association of America, 2001.

[\[Clique aqui para voltar para a página principal!\]](#)

Dúvidas? Sugestões? Nós damos suporte! Contacte-nos pelo e-mail:
conteudosdigitais@im.uff.br.

Anexo

Formulário de Acompanhamento do Aluno

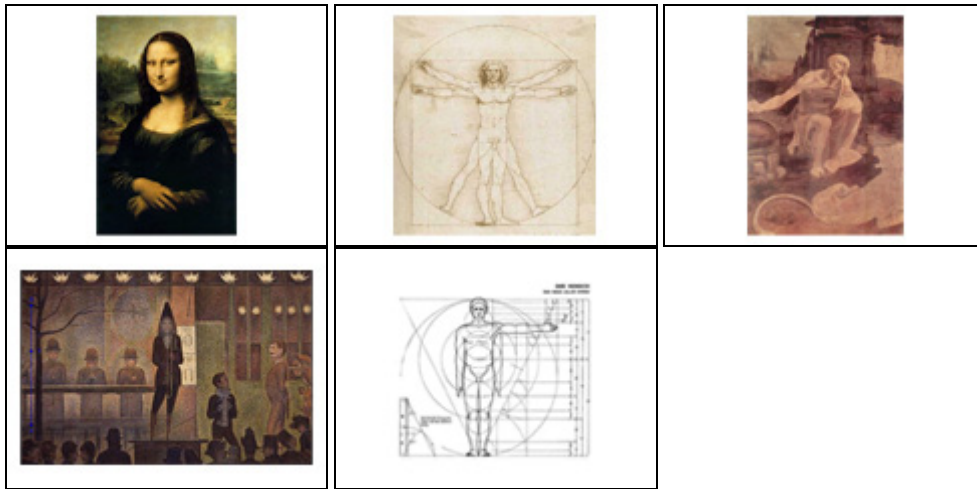
Atividade: o número de ouro

Aluno(a): _____ Turma: _____

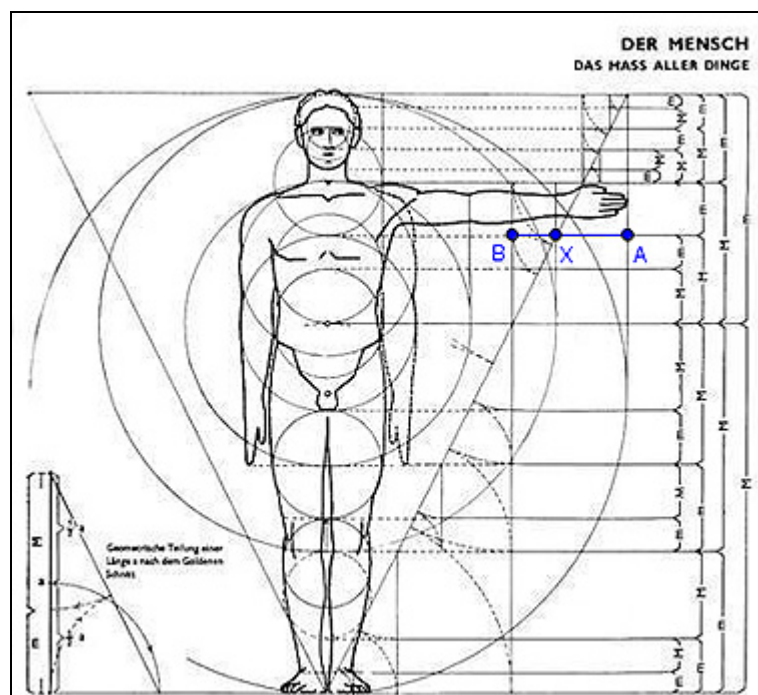
Professor(a): _____

PARTE 1

[01] Marque nas figuras abaixo os elementos áureos que você encontrou em cada figura!



[02] Na ilustração *Der Mensch das Mass aller Dinge*, Neufert indica explicitamente a presença da razão áurea para segmentos verticais através dos símbolos “m” e “M” girados de 90°. Ele não faz isto para segmentos horizontais. É possível concluir que, na figura abaixo, o ponto **X** realmente divide o segmento **AB** na razão áurea? Justifique sua resposta!



PARTE 2

[01] Quais são os valores de a e b que você escolheu para aproximar o formato da concha do náutilo por uma espiral logarítmica?

[02] Explique, com suas palavras, quais são os efeitos geométricos que o fator de escala a e o fator de crescimento b têm sobre o formato da espiral logarítmica. O que acontece se $b = 0$? E se $a = 0$?

[03] (Opcional) Alguns autores permitem que o fator de crescimento b de uma espiral logarítmica assumam valores negativos também. Qual é a diferença entre as espirais logarítmicas

$$r = a e^{+|b|\theta} \quad \text{e} \quad r = a e^{-|b|\theta}?$$

PARTE 3

[01] Indique na tabela abaixo os valores de $k = CD/AB$ que você encontrou para os elementos anatômicos considerados por Vitruvius.

CD	AB	$k = CD/AB$
Altura.	Comprimento dos braços estendidos.	
Altura.	Distância entre a raiz do cabelo e a linha do queixo.	
Altura.	Largura máxima dos ombros.	
Altura.	Distância do topo da cabeça para a linha inferior do queixo.	
Altura.	Distância do topo da cabeça para a linha dos mamilos.	
Altura.	Distância do cotovelo para a axila.	
Altura.	Distância do cotovelo para a ponta da mão.	
Altura da cabeça.	Distância da linha do queixo para o nariz.	
Altura.	Comprimento da mão.	
Altura da face.	Distância da raiz do cabelo para a linha das sobrancelhas.	
Altura.	Distância do topo da cabeça até a linha inferior do pescoço.	

[02] Vitruvius indica que o comprimento do pé de um homem deve ser igual a um sexto de sua altura. Leonardo da Vinci desenhou o pé do *O Homem Vitruviano* seguindo esta orientação?

PARTE 4

[01] Uma fotografia de um segmento dividido em duas partes iguais pode exibir um segmento dividido na razão áurea?

[02] Mona Lisa é retratada com o rosto ligeiramente virado para a sua esquerda no quadro pintado por Leonardo da Vinci. O que aconteceria com as proporções do seu rosto em um quadro onde ela estivesse com o rosto posicionado de frente para o pintor?

PARTE 5

[01] Mostre que o número de ouro ϕ é uma raiz da função quadrática $f(x) = x^2 - x - 1$. Mostre que a outra raiz é $-1/\phi$.

[02] Usando que o número de ouro satisfaz a equação $\phi^2 = \phi + 1$, calcule $\phi^4 + \phi^3 - \phi$ (você pode calcular este número sem uma calculadora!).

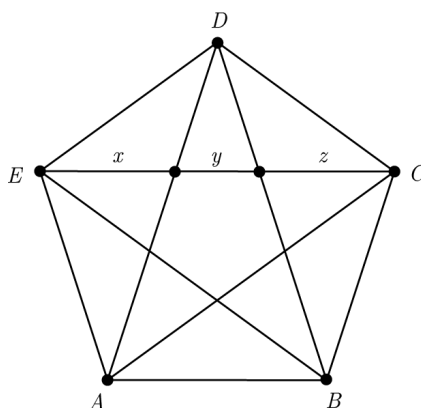
[03] Sem usar uma calculadora, calcule o valor exato dos seguintes números (ϕ , como sempre, representa o número de ouro):

$$p = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}}} \quad \text{e} \quad q = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}}.$$

[04] Mostre que

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \quad \text{e} \quad \phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}.$$

[05] Na figura abaixo, $ABCDE$ é um pentágono regular e a diagonal CE está dividida em três segmentos de comprimentos x , y e z . Demonstre que $x/y = \phi$, $(x + y)/z = \phi$ e $(x + y + z)/(x + y) = \phi$. Mais ainda, demonstre que se $y = 1$, então $x = \phi$, $(x + y) = \phi^2$ e $(x + y + z) = \phi^3$.



[06] Por que a construção com régua e compasso descrita no item (7) da Parte 5 (Algumas Propriedades Matemáticas do Número de Ouro) de fato produz o ponto X que divide o segmento AB na razão áurea?

[07] Enquanto que a razão de ouro ϕ é a raiz positiva da função quadrática $f(x) = x^2 - x - 1$, a *razão de prata* (em inglês, *silver ratio*) δ_s é a raiz positiva da função quadrática $g(x) = x^2 - 2x - 1$. Calcule o número de prata!

PARTE 6

[01] Considere a equação quadrática $F_n x^2 = F_{n-1} x + F_{n-2}$. Explique por que $x = 1$ é uma solução desta equação e por que $x = (F_{n-1}/F_n) - 1$ é a outra.

[02] (Opcional) Usando a fórmula de Binet, mostre que quando n tende para infinito, o quociente F_{n+1}/F_n tende para ϕ .

[03] (Opcional) O objetivo deste exercício é deduzir a fórmula de Binet usando matrizes. O volume 2 da coleção “A Matemática do Ensino Médio” de E. L. Lima et alii apresenta uma outra demonstração para a fórmula de Binet através de um teorema de caracterização de soluções de recorrências lineares de segunda ordem.

(a) Mostre que para todo $n \geq 3$,

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Mostre que para todo $n \geq 3$,

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = A^{n-2} \cdot \begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix}.$$

(c) Mostre que

$$A = \begin{bmatrix} \phi & -\phi^{-1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & -\phi^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\phi}{\phi+2} & \frac{1}{\phi+2} \\ -\frac{\phi}{\phi+2} & \frac{\phi+1}{\phi+2} \end{bmatrix} = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

(d) Mostre que para todo $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} A^{n-2} &= \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n-2} = \underbrace{(P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot \dots \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1})}_{n-2} = P \cdot D^{n-2} \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot \begin{bmatrix} \phi^{n-2} & 0 \\ 0 & (-\phi)^{-(n-2)} \end{bmatrix} \cdot P^{-1}. \end{aligned}$$

(e) Mostre que para todo $n \geq 3$,

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & -\phi^{-1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi^{n-2} & 0 \\ 0 & (-\phi)^{-(n-2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\phi}{\phi+2} & \frac{1}{\phi+2} \\ -\frac{\phi}{\phi+2} & \frac{\phi+1}{\phi+2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix}.$$

(f) Lembrando que $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$, use a equação matricial acima para deduzir a fórmula de Binet. Dica: use que $\phi^n + \phi^{n-1} = \phi^{n-1}(\phi + 1) = \phi^{n-1}\phi^2 = \phi^{n+1}$ e que $1 + 2/\phi$ é igual a raiz quadrada de 5.

PARTE 7

[01] Procure no YouTube (<http://www.youtube.com.br>) por vídeos relacionados com o número de ouro. Inclua na sua pesquisa vídeos em espanhol (número de oro), vídeos em inglês (golden number) e vídeos em francês (nombre d'or). Faça então uma análise crítica das imagens. Os elementos áureos estão posicionados de forma a realmente indicar uma região de interesse? Ao enquadrar um retângulo áureo, por exemplo, parte da região de interesse ficou de fora? Você pode começar sua análise a partir do desenho animado Donald no País da Matemática (<http://www.youtube.com/watch?v=SUSyRUkFKHY>).